LICEO SCIENTIFICO 2019 - PROBLEMA 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad\qquad g(x) = (ax+b)\, e^{2x-x^2}$$

a)

Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2,1)$.

Dimostriamo che, per ogni a e b reali, con a non nullo, la funzione g ammette massimo e minimo assoluti.
La funzione g è definita e continua su tutto R e risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} ax\, e^{-x^2} = 0$$ (Ricordiamo che $\lim_{x\to-\infty} x^a\, e^{bx} = 0$ per ogni a e b positivi).

Studiamo la derivata prima di g(x):

$$g'(x) = a\, e^{2x-x^2} + (ax+b)\, e^{2x-x^2}(2-2x) = e^{2x-x^2}\left(-2ax^2 + 2x(a-b) + 2a\right)$$

$$g'(x) \geq 0: \quad -2ax^2 + 2x(a-b) + 2b + a \geq 0\ , \quad 2ax^2 - 2x(a-b) - 2b - a \leq 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (a+b)^2 + 2a^2 > 0 \quad \forall a \neq 0\ e\ \forall b \in R$$

$$x_{1,2} = \frac{a - b \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{2a}, \quad x_1 = \frac{a - b - \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{a - b + \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{2a}$$

Se $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$ *risulta* $x_1 < x_2$ e risulta $g'(x) \geq 0$ *se* $x_1 \leq x \leq x_2$:

g decresce per $x < x_1$, *cresce per* $x_1 < x < x_2$, *decresce per* $x > x_2$: quindi, ricordando quanto detto sui limiti per $x \to \pm\infty$, possiamo concludere che x_1 e punto di minimo assoluto e $x = x_2$ è punto di massimo assoluto.

Se $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$ *risulta* $x_1 > x_2$ e risulta $g'(x) \geq 0$ *se* $x \leq x_2$ *vel* $x \geq x_1$:

g cresce per $x < x_2$, *decresce per* $x_2 < x < x_1$, *cresce per* $x > x_1$: quindi, ricordando quanto detto sui limiti per $x \to \pm\infty$, possiamo concludere che x_1 e punto di minimo assoluto e x_2 è punto di massimo assoluto.

Determiniamo ora a e b in modo che i grafici di f e g si intersechino in A(2; 1).
Imponiamo che i grafici di f e g passino per A:

$$\begin{cases} 1 = 4a - 2 + b \\ (2a+b)e^0 = 1 \end{cases} ; \ldots \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

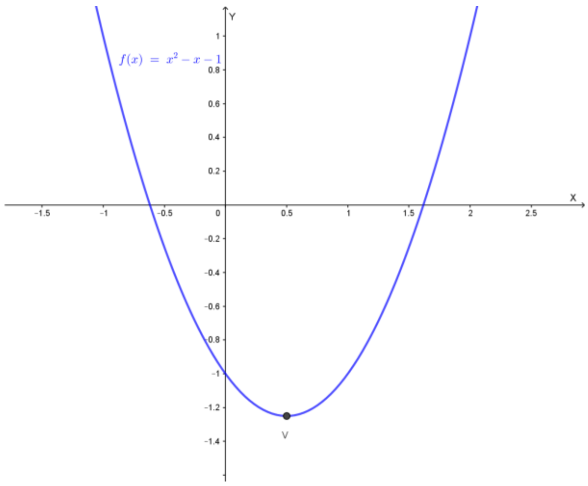
b)

Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.

Studiamo le due funzioni con $a = 1 \;\; e \;\; b = -1$:

$\boldsymbol{y = f(x) = x^2 - x - 1}$

Si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse y, con vertice $V = \left(\frac{1}{2}\,;\,-\frac{5}{4}\right)$, che taglia l'asse y in (0; - 1) e l'asse x in $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Il suo grafico è quindi il seguente:



Studiamo ora la seconda funzione:

$\boldsymbol{y = g(x) = (x - 1)\, e^{2x - x^2}}$

Dominio: tutto R.
Intersezioni con gli assi: se x=0, y = -1; se y=0, x=1.
Segno: $y > 0 \;\; se \;\; x > 1$
Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\, e^{-x^2} = 0^{\pm}$ (y=0 asintoto per $x \to \pm\infty$).

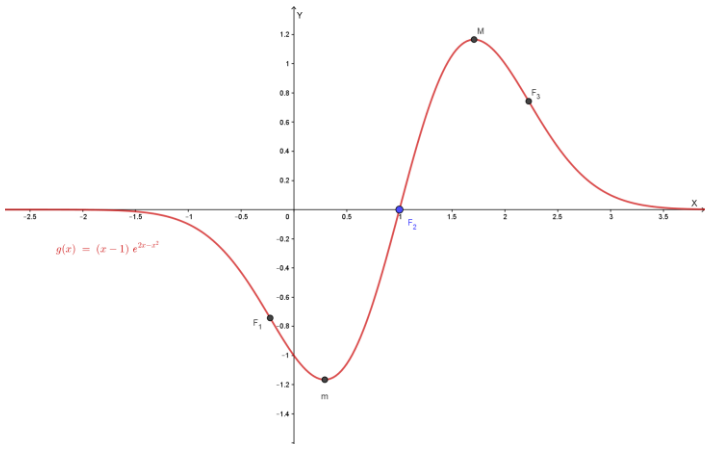
Studio derivata prima:
ponendo a=1 e b=-1 nella derivata calcolata con a e b generici si ha:

$g'(x) = e^{2x-x^2}\,(-2x^2 + 4x - 1);\;\; g'(x) \geq 0 \;\; se \;\; -2x^2 + 4x - 1 \geq 0 : \;\; \frac{2-\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Essendo a>0, come studiato precedentemente abbiamo: $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ punto di minimo assoluto, di ordinata $-\sqrt{\frac{e}{2}}$ ed $x = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ punto di massimo assoluto, di ordinata $\sqrt{\frac{e}{2}}$.
Studio derivata seconda:

$g''(x) = \cdots = 2(x-1)\, e^{2x-x^2}(2x^2 - 4x - 1) \geq 0 \;\; se \;\; (x-1)(2x^2 - 4x - 1) \geq 0$ e studiando il segno dei due fattori si ottiene:

$g''(x) \geq 0 \;\; per \;\; 1-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq 1 \;\; vel \;\; x \geq 1+\sqrt{\frac{3}{2}}$, quindi il grafico di g ha la concavità verso l'alto per $1-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 1 \;\; e \;\; x > 1+\sqrt{\frac{3}{2}}$ e verso il basso per $x < 1-\sqrt{\frac{3}{2}} \;\; e \;\; 1 < x < 1+\sqrt{\frac{3}{2}}$, pertanto abbiamo tre flessi per $x = 1-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = 1, x = 1+\sqrt{\frac{3}{2}}$ (le ordinate sono rispettivamente $\cong -0.7, \; 1 \;\; e \;\; \cong 0.7$).
Il grafico della g è il seguente:



Dimostriamo ora che la g è simmetrica rispetto ad $F_2 = (1; 0)$.
Le equazioni della simmetria rispetto al punto di coordinate (a; b) sono:

$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$; *quindi nel nostro caso*: $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -y \end{cases}$, *da cui*: $\begin{cases} x = 2 - x' \\ y = -y' \end{cases}$

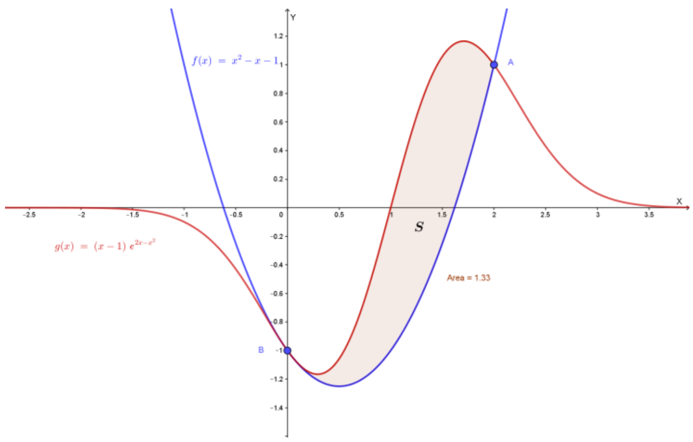
$y = g(x) = (x-1)\, e^{2x-x^2}$, trascurando gli apici, diventa: $-y = (2-x-1)e^{2(2-x)-(2-x)^2}$, da cui, eseguendo i calcoli:
$y = (x-1)\, e^{2x-x^2} = g(x)$: e ciò dimostra che la g è simmetrica rispetto ad $F_2 = (1; 0)$.

Dimostriamo che i grafici di f e g sono tangenti in B=(0; - 1). Abbiamo già visto che entrambi i grafici passano per B, resta da verificare che $f'(0) = g'(0)$.

$f'(x) = 2x - 1$, *quindi*: $f'(0) = -1$; $g'(x) = e^{2x-x^2}\,(-2x^2 + 4x - 1)$, *quindi* $g'(0) = -1$.

La tangente comune ai due grafici ha equazione: $y = -x - 1$.

Per calcolare l'area della regione S delimitata dai grafici di f e g rappresentiamoli nello stesso piano cartesiano:



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area(S)=\int_0^2[g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^2\left[(x-1)\,e^{2x-x^2}-(x^2-x-1)\right]dx$$

Cerchiamo una primitiva di g(x):

$$\int(x-1)\,e^{2x-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int(2-2x)\,e^{2x-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\ e^{2x-x^2}$$

Cerchiamo una primitiva di f(x):

$$\int(x^2-x-1)\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x-x$$

Quindi:

$$Area(S)=\int_0^2\left[(x-1)\,e^{2x-x^2}-(x^2-x-1)\right]dx=\left[-\frac{1}{2}\ e^{2x-x^2}-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x-x\right)\right]_0^2=\cdots=\frac{4}{3}\,u^2$$

$$Area(S)=\frac{4}{3}\,u^2\cong 1.33\ \ u^2$$

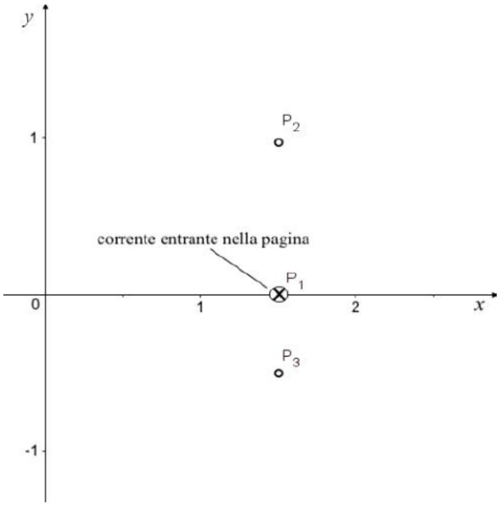
c)

Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti:

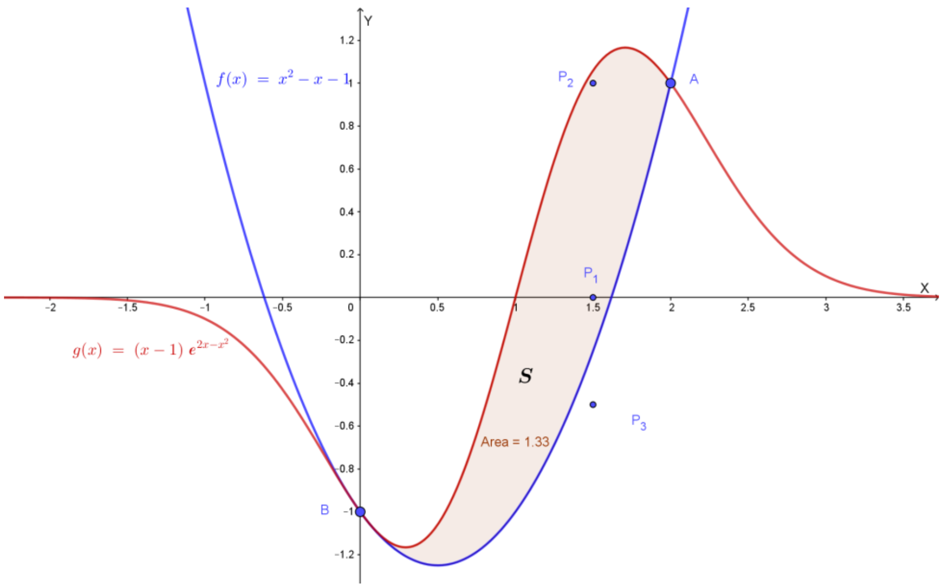
$P_1\left(\frac{3}{2},0\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2},1\right)$ e $P_3\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1=2{,}0$ A, i_2 e i_3. Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il contorno di S, a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3.



Rappresentiamo i tre punti nel piano cartesiano insieme alla regione S:



Chiaramente P_3 è esterno ad S (quindi non contribuisce alla circuitazione); P_1 è visibilmente interno ad S. Verifichiamo la posizione di P_2, confrontando la sua ordinata con l'ordinata del punto di g(x) che ha la stessa ascissa 1: $y(P_2) = 1$, $g\left(x_{P_2}\right) = g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right) e^{3-\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} e^{\frac{3}{4}} \cong 1.06$:
quindi P_2 è interno ad S.
Supponiamo che il contorno di S sia orientato in senso orario (nel caso contrario cambia il segno dei risultati). Detta C la circuitazione del campo totale, risulta:
$\boldsymbol{C(\vec{B}) = \mu_0\, i_1 + \mu_0\, i_2}$ (dove le intensità di corrente sono intese in senso algebrico). Si ha:
$C(\vec{B}) = \mu_0(2\,A + i_2) = f(i_2)$. Notiamo che C non dipende da i_3. Studiamo la variazione di C al variare di i_2 .
Se i_2 ha lo stesso segno di i_1 (positivo con il verso scelto per il contorno di S), risulta:
$C(\vec{B}) = \mu_0(2\,A + i_2) > 0$.
Se i_2 ha stesso segno opposto a quello di i_1, quindi segno negativo, si hanno i seguenti casi:

- Se $i_2 = -2\,A$: $C(\vec{B}) = \mu_0(2\,A - 2\,A) = 0$.
- Se $i_2 < -2\,A$: $C(\vec{B}) = \mu_0(2\,A + i_2) < 0$.
- Se $-2\,A < i_2 < 0\,A$: $C(\vec{B}) = \mu_0(2\,A + i_2) > 0$.
- Se $i_2 = 0\,A$: $C(\vec{B}) = \mu_0(2\,A) > 0$.

Se orientiamo il contorno di S in senso antiorario si avranno risultati opposti.

d)

Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0{,}20\ \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T}$ perpendicolare alla regione S. Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a 5,0 mA. Determinare il valore di ω.

$R = 0.20\ \Omega$, $\quad$ $\mathrm{B} = 1.5 \cdot 10^{-2}\, T$, $\quad$ $i(massima) = 5.0\, mA = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\, A$

Se ω è costante, l'angolo α fra la normale ad S e $\vec{B}$ è dato da: $\alpha = \omega t$. Il flusso di $\vec{B}$ attraverso S è:

$$\Phi(\vec{B}) = BS\cos\alpha = BS\cos(\omega t)$$

La f.e.m. indotta f (per la legge di Faraday- Neumann-Lenz) è data da:

$$f = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS\cos(\omega t)) = BS\omega\sin(\omega t).$$ Inoltre:

$$i = \frac{f}{R} = \frac{BS\omega}{R}\sin(\omega t);\quad i(massima) = \frac{BS\omega}{R} = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\, A\,,$$

$$\omega = \frac{(5{,}0 \cdot 10^{-3}\, A)\, R}{BS} = \frac{(5{,}0 \cdot 10^{-3}\, A)\,(0.20\ \Omega)}{(1.5 \cdot 10^{-2}\, T)(\frac{4}{3} m^2)} = 0.05\ \frac{rad}{s} = \omega\,.$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri