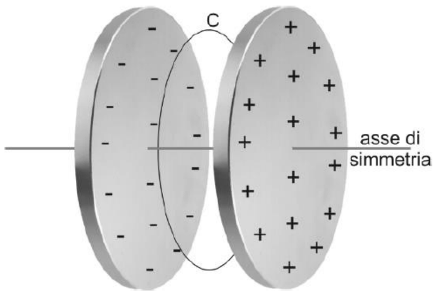
LICEO SCIENTIFICO 2019 - PROBLEMA 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R, poste a distanza d, dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di $\vec{B}$, espressa in tesla (T), varia secondo la legge:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\, r \qquad \text{con } r \leq R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

a)

Dopo aver determinato le unità di misura di a e k, spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al condensatore?

L'unità di misura di a è: secondo (s) (per coerenza da $t^2 + a^2$).
Per cercare l'unità di misura di k ricaviamolo dalla formula data:

$$k = \frac{B\sqrt{(t^2+a^2)^3}}{tr}\, .\, Quindi\ le\ dimensioni\ di\ k\ sono:$$

$$[k] = \frac{[B][t]^3}{[t][L]} = \frac{[B][t]^2}{[L]}\,, \qquad quindi:$$

L'unità di misura di k è: $\frac{Tesla \cdot secondo^2}{metro} = \frac{T \cdot s^2}{m}$.

Il campo magnetico presente nel condensatore è dovuto alla "corrente di spostamento" generata dalla variazione del flusso del campo elettrico (legge di Ampère-Maxwell).

Il campo elettrico è perpendicolare alle armature e diretto verso l'armatura negativa. Il campo magnetico è tangente alla circonferenza C in ogni punto ed è diretto in modo tale che la normale alla superficie racchiusa da C sia diretta come il campo elettrico $\vec{E}$: $\vec{E} \perp \vec{B}$.

b)

Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r. Determinare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo C e da essa ricavare che il flusso di $\vec{E}$, attraverso la superficie circolare delimitata da C, è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{1}{a}\right)$$

Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.

A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

CONFORM

Essendo B costante in ogni punto di C, si ha:

$$C(\vec{B}) = 2\pi r \cdot B = \frac{2\pi k r^2 t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$$

Detta i_S la corrente di spostamento (l'unica presente nel condensatore), si ha:

$$C(\vec{B}) = \mu_0\, i_S = \mu_0\left(\epsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}\right)$$

Quindi:

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{C(\vec{B})}{\mu_0\epsilon_0}\cdot dt = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\cdot dt$$

Integrando:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0\epsilon_0}\int\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\cdot dt = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0\epsilon_0}\int t\cdot(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}\,dt = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\int 2t\cdot(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{\pi k r^2}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\frac{(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2\pi k r^2}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{(t^2+a^2)}} + C = \Phi(\vec{E})$$

Per trovare il valore della costante C osserviamo che se $t = 0\ si\ ha\ \Phi(\vec{E}) = 0\,, quindi\ (essendo\ a > 0)$:

$$0 = -\frac{2\pi k r^2}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2}} + C, da\ cui:\ C = \frac{2\pi k r^2}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\frac{1}{a}$$

Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie delimitata da C è dato quindi da:

$$\Phi(\vec{E}) = -\frac{2\pi k r^2}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{(t^2+a^2)}} + \frac{2\pi k r^2}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\frac{1}{a} = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0\epsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{(t^2+a^2)}} + \frac{1}{a}\right)\quad come\ richiesto.$$

Calcoliamo ora la d.d.p. tra le armature del condensatore. Risulta:

$$V = E\cdot d,\qquad ed\ è\ \Phi(\vec{E}) = E\cdot S = E\cdot\pi r^2,\qquad quindi:\ E = \frac{\Phi(\vec{E})}{\pi r^2} = \frac{2k}{\mu_0\epsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{(t^2+a^2)}} + \frac{1}{a}\right), quindi$$

$V = E \cdot d = \frac{2kd}{\mu_0\epsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{(t^2+a^2)}}+\frac{1}{a}\right).$

Al trascorrere del tempo si ha:

$$\lim_{t\to+\infty} B = \lim_{t\to+\infty}\frac{krt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{krt}{t^3} = \lim_{t\to+\infty}\frac{kr}{t^2} = 0^+$$

Il modulo del campo magnetico tende ad annullarsi col trascorrere del tempo.

Giustificazione dal punto di vista fisico:

Al tendere di t all'infinito il valore di E tende ad essere costante $\left(\frac{2k}{\mu_0\epsilon_0}\cdot\frac{1}{a}\right)$, quindi la corrente di spostamento tende ad annullarsi e ciò significa che B tende ad annullarsi.

c)

Per $a > 0$, si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$. Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione F, individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.

$$\boldsymbol{y = f(t) = \frac{-t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}},\qquad con\ a > 0;\quad F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}}$$

Per dimostrare che F(t) è una primitiva di f(t) è sufficiente dimostrare che $F'(t) = f(t),\ \forall t \in R$.

$$F'(t) = D\left[(t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{a}\right] = -\frac{1}{2}(t^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}(2t) = \frac{-t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} = f(t),\ \ c.v.d.$$

Risulta poi $F(0) = 0$: quindi F è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine.

Studiamo ora la funzione:

$$y = F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$$

Dominio: R; la funzione è continua su tutto R.

Intersezioni con gli assi: (0;0).

Simmetrie notevoli: $F(-t) = F(t)$: F è pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Limiti:
$\lim_{t\to\pm\infty} F(t) = 0 - \frac{1}{a} = 0$: $y = -\frac{1}{a}$ *asintoto orizzontale per* $t\to\pm\infty$
Essendoci asintoto orizzontale per $t\to\pm\infty$ non possono esserci asintoti obliqui; e siccome la funzione è continua su tutto R non possono esserci asintoti verticali.

Derivata prima:

$$F'(t)=f(t)=\frac{-t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}>0 \ \ per\, t<0:$$

F è crescente per $t<0$ e decrescente per $t>0$: $t=0$ è un punto di massimo relativo (ed assoluto), con ordinata $F(0)=0$: la funzione non ha minimi (né assoluti né relativi) ma solo un massimo relativo (ed assoluto).

Derivata seconda:

$$F''(t)=f'(t)=\cdots=\frac{2t^2-a^2}{\sqrt{(t^2+a^2)^5}}\geq 0 \ \ se\ t^2\geq\frac{a^2}{2},\ \ t\leq-\frac{a}{\sqrt{2}}\ \ vel\ t\geq\frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad quindi:$$

il grafico di F volge la concavità verso l'alto per $t<-\frac{a}{\sqrt{2}}\ \ e\ \ t>\frac{a}{\sqrt{2}}$ e verso il basso per

$$-\frac{a}{\sqrt{2}}<t<\frac{a}{\sqrt{2}}: \quad x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a \qquad punti\ di\ flesso.$$

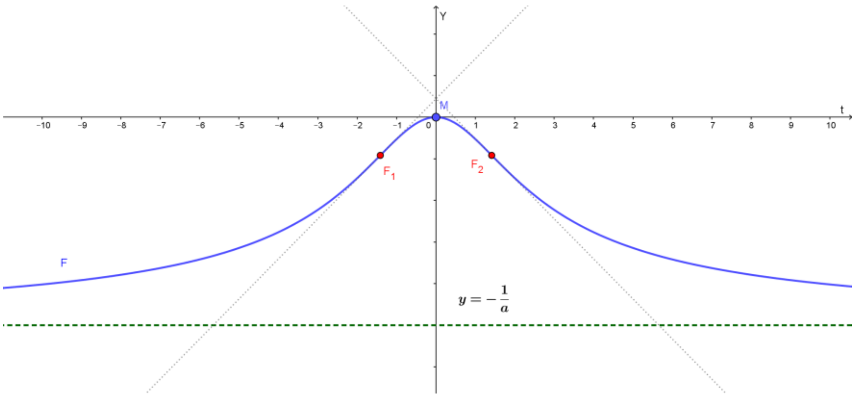
I due flessi hanno la stessa ordinata $F\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\cdots=\frac{\sqrt{6}-3}{3a}$; $F_1=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a;\frac{\sqrt{6}-3}{3a}\right), F_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a;\frac{\sqrt{6}-3}{3a}\right)$.

La pendenza delle rette tangenti nei flessi è data dal coefficiente angolare delle tangenti in essi, che si calcola mediante la derivata prima:

pendenza della tangente in F_1: $F'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\cdots=-\frac{2\sqrt{3}}{9a^2}$

pendenza della tangente in F_2: $F'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\cdots=\frac{2\sqrt{3}}{9a^2}$

Grafico della funzione F:



d)

Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F, specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f. Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b>0$, calcolare il valore di $\int_{-b}^{b}f(t)\,dt$.

Deduciamo il grafico di f da quello di F (si tratta di dedurre dal grafico di una funzione, F, il grafico della sua derivata $F'(t)=f(t)$).

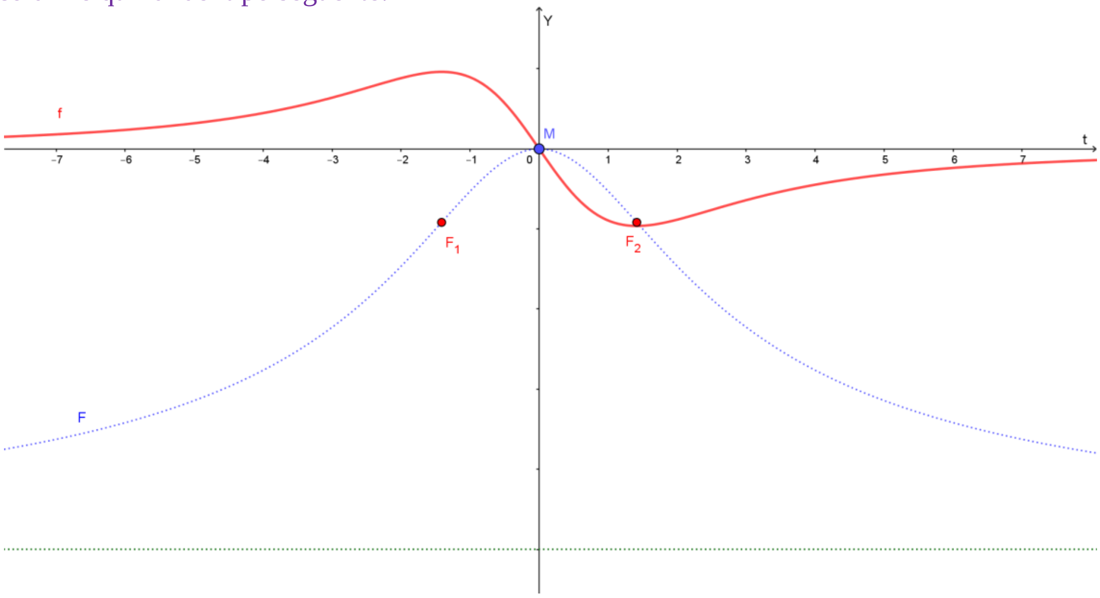
- Per $t < 0$ F è crescente quindi $F' = f > 0$; per $t > 0$ F è decrescente quindi $F' = f < 0$. Per $t = 0$ F ha un massimo, quindi, essendo derivabile, $F'(0) = f(0) = 0$.

- Avendo F asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$, risulta: $\lim_{t\to\pm\infty} F'(t) = 0^{\mp} = \lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0^{\mp}$

- $F'' = f' > 0$ per $t < -\frac{a}{\sqrt{2}}$ $\ vel\ $ $t > \frac{a}{\sqrt{2}}$: f crescente; $F'' = f' < 0$ per $-\frac{a}{\sqrt{2}} < t < \frac{a}{\sqrt{2}}$: f decrescente: f ha un punto di massimo relativo (ed anche assoluto) in $t = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ ed un minimo relativo (ed anche assoluto) in $t = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

- Abbiamo già osservato che nei punti di flesso di F la funzione f ha un massimo ed un minimo.

Il grafico di f è quindi del tipo seguente:



Ricordiamo che F è una primitiva di f e che, essendo F pari, f è dispari; pertanto l'area della parte di piano compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse y passanti per il minimo ed il massimo di f è data da:

$$Area = 2\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} f(t)\,dt = 2[F(t)]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{0} = 2\left[F(0) - F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\right] = 0 - 2\,F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) =$$

$$= -2\left(\frac{\sqrt{6}-3}{3a}\right)u^2 = \frac{2(3-\sqrt{6})}{3a}\ u^2 = Area$$

Fissato ora $b > 0$, essendo f dispari risulta, per ogni b:

$$\int_{-b}^{b} f(t)\,dt = 0$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri