LICEO SCIENTIFICO 2019 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$, dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $12/5$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 3$, $x = -3$ e $y = 5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f.

In base ai dati forniti, la funzione deve avere la seguente equazione:

$$f(x) = \frac{5x\left(x - \frac{12}{5}\right)}{x^2 - 9} = \frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9}$$

Soluzione alternativa (imponendo le varie condizioni passo passo):

$$f(0) = \frac{p(0)}{d} = 0\,, \qquad quindi\colon\ p(0) = 0\ \ con\ d \neq 0$$

$$f\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{p\left(\frac{12}{5}\right)}{\frac{144}{25} + d} = 0\,, \quad quindi\colon p\left(\frac{12}{5}\right) = 0\ \ con\ d \neq -\frac{144}{25}$$

$$\lim_{x\to\pm 3} \frac{p(x)}{x^2 + d} = \infty\,,\ \ solo\ se\ x^2 + d = 0\ \ per\ x = \pm 3, \qquad quindi\ \ d = -9$$

Affinché $y = 5$ sia asintoto deve essere:

$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x^2+d} = 5$, quindi p(x) deve essere un polinomio di secondo grado del tipo: $p(x) = 5x^2 + bx + c$

Essendo $p(0) = 0$ $\ si\ ha\ c = 0$; da $p\left(\frac{12}{5}\right) = 0$ segue: $0 = 5 \cdot \frac{144}{25} + \frac{12}{5}b,\ da\ cui\colon\ b = -12$

Si ha perciò:

$$f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + d} = \frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9}\ , \qquad x \neq \pm 3$$

Determiniamo ora i punti di massimo e di minimo relativi di f.

$$f'(x) = \frac{(10x - 12)(x^2 - 9) - 2x(5x^2 - 12x)}{(x^2 - 9)^2} \geq 0\ \ se\colon\ (10x - 12)(x^2 - 9) - 2x(5x^2 - 12x) \geq 0$$

Eseguendo i calcoli e semplificando si ha: $2x^2 - 15x + 18 \geq 0$: $x \leq \frac{3}{2}$ vel $x \geq 6$, $con\, x \neq \pm 3$.
Quindi la funzione è crescente per: $x < -3$; $-3 < x < \frac{3}{2}$; $x > 6$

$e\ decrescente\ per\ \frac{3}{2} < x < 3,\qquad 3 < x < 6$:

$x = \frac{3}{2}$ $punto\ di\ massimo\ relativo,$ $\qquad x = 6\ punto\ di\ minimo\ relativo$

QUESITO 2

È assegnata la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}$$

Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^{\,x}}$$

Si ha:

$g(x) = x(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2018}) = 0$ $solo\ per\ x_0 = 0$ $essendo$ $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2018} \geq 1$

Osserviamo che per $x \to +\infty$ $g(x) \sim x^{2019}$, quindi:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2019}}{1{,}1^x} = 0^+$, perché $1{,}1^x$ è infinito di ordine superiore ad x^{2019} $per\ x \to +\infty$.

N.B.

$g(x)$ è la somma dei primi 1010 termini di una progressione geometrica con primo termine $a_1 = x$ e ragione $q = x^2$. Si ha quindi:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = x \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2} = x \frac{1 - x^{2020}}{1 - x^2} \sim x^{2019}\ \ per\ \ x \to +\infty$$

Soluzione alternativa della prima parte del quesito

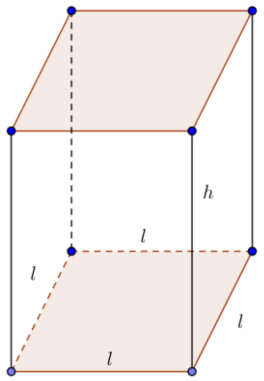
La funzione $g(x)$ è una funzione polinomiale intera, quindi è definita e continua su tutto R. Inoltre è dispari essendo $g(-x) = -g(x)$. Per una conseguenza del *Teorema degli zeri*, essendo $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$, la funzione si annulla almeno una volta. Ma la derivata di $g(x)$, funzione pari, è:

$$g'(x) = 1 + 2x^2 + 3x^2 + 5x^2 + \cdots + 2019x^{2018} > 0\ \ per\ ogni\ x$$

Quindi g è strettamente crescente in tutto il suo dominio, perciò si annulla una sola volta: abbiamo così dimostrato che esiste un solo $x_0 \in R$ tale che $g(x_0) = 0$.

QUESITO 3

Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area S, determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.



$$S = 2l^2 + 4l \cdot h = costante$$

$$y = 8l + 4h = Minimo, \qquad con\ \ l > 0\ \ e\ \ h > 0$$

Esprimiamo y in funzione di l:

$$h = \frac{S - 2l^2}{4l}\ , \qquad quindi:\ \ y = 8l + \frac{S - 2l^2}{l} = \frac{6l^2 + S}{l} = 6l + \frac{S}{l}$$

$$y' = 6 - \frac{S}{l^2} \geq 0\ \ se\ \ 6l^2 - S \geq 0:\ \ l \leq -\sqrt{\frac{S}{6}}\ \ vel\ \ l \geq \sqrt{\frac{S}{6}}$$

Quindi y, continua nei limiti geometrici su l, è decrescente per $0 < l < \sqrt{\frac{S}{6}}$ e crescente per $l < \sqrt{\frac{S}{6}}$:

$$y\ \ ha\ minimo\ assoluto\ \ per\ \ l = \sqrt{\frac{S}{6}}\ \ \ e\ \ \ \ h = \frac{S - 2l^2}{4l} = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

La somma delle lunghezze degli spigoli è minima quando il parallelepipedo è un cubo di spigolo $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

QUESITO 4

Dati i punti $A(2, 0, -1)$ e $B(-2, 2, 1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10, 8, 7)$ appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S.

Posto $P = (x;\ y;\ z)$, il luogo richiesto è il seguente:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

Elevando al quadrato e semplificando si ottiene:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$$

Il luogo è una sfera S con centro $C = (-6; 4; 3)$ e raggio:

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d} = \sqrt{36 + 16 + 9 - 13} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} = r.$$

Verifichiamo che $T = (-10; 8; 7)$ appartiene ad S:

$$100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0\ , \qquad 0 = 0:\ \ T \in S$$

Il piano π tangente in T ad S si può ottenere come piano per T perpendicolare a CT.

Parametri direttori della retta CT (coincidenti con quelli del piano π):

$$a = -10 + 6 = -4\,, \qquad b = 8 - 4 = 4\,, \qquad c = 7 - 3 = 4$$

$$\pi\colon\ a(x - x_T) + b(y - y_T) + c(z - z_T) = 0\,, \qquad -4(x + 10) + 4(y - 8) + 4(z - 7) = 0$$

Piano tangente in T ad S: $x - y - z + 25 = 0$.

QUESITO 5

Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.

- Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
- Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
- Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

a) La somma dei 4 numeri non supera 5 se si hanno quattro 1 oppure tre 1 ed un 2. Si hanno quattro 1 in 1 solo caso e tre 1 ed un 2 in 4 casi (il 2 può essere nel primo, nel secondo, nel terzo o nel quarto dado). Quindi i casi favorevoli sono 1+4=5. I casi possibili sono 6^4 (disposizioni con ripetizione di 6 oggetti, i numeri delle facce di ogni dado, a 4 a 4, il numero dei dadi). Quindi:

$$p = \frac{5}{6^4} = \frac{5}{1296} \cong 0{,}0039 \cong 0.4\ \%$$

b) Il prodotto dei quattro numeri è multiplo di 3 se su almeno un dado esce 3 oppure 6.
Supponiamo che esca il 3 oppure il 6 nel primo dado; negli altri tre dadi può uscire un numero qualsiasi. In questa ipotesi i casi possibili sono: $2(6^3) = 432$.
Se nel primo dado non esce né il 3 né il 6, supponiamo che esca il 3 oppure il 6 nel secondo dado; nei due dadi rimanenti può uscire un numero qualsiasi. In questa ipotesi i casi possibili sono:

$$4(2)(6^2) = 288.$$

Supponiamo che non escano il 3 ed il 6 né nel primo né nel secondo dado, ma esca il 3 oppure il 6 nel terzo dado (nel quarto dado può uscire un valore qualsiasi). Casi possibili: $4(4)(2)(6) = 192$:
Supponiamo infine che non escano né il 3 né il 6 nei primi tre dadi, allora deve uscire il 3 oppure il 6 nel quarto dado. Casi possibili: $(4)(4)(4)(2) = 128$.

In totale i casi favorevoli sono quindi: $432 + 288 + 192 + 128 = 1040$.
I casi possibili sono sempre $6^4 = 1296$, quindi la probabilità richiesta in questo caso è:

$$p = \frac{1040}{1296} = \frac{65}{81} \cong 0.802 \cong 80.2\ \%$$

c) Il massimo numero uscito è 4 quando non escono né 5 né 6 in alcun dado (indichiamo con p_1 tale probabilità) ma non escano 1 oppure 2 oppure 3 in tutti i dadi (indichiamo con p_2 questa probabilità). Risulta:

$$p_1 = \frac{(4)(4)(4)(4)}{6^4} = \frac{4^4}{6^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}; \qquad p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

Quindi la probabilità che il massimo uscito sia 4 è:

$$p = p_1 - p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{16}{81} - \frac{1}{16} = \frac{175}{1296} \cong 0.135 \cong 13.5\ \%$$

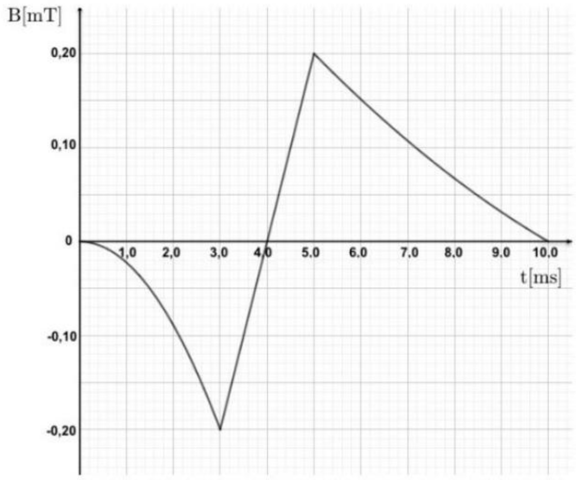
QUESITO 6

Una spira di rame, di resistenza $R = 4{,}0\ \mathrm{m}\Omega$, racchiude un'area di $30\ \mathrm{cm}^2$ ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura. Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:

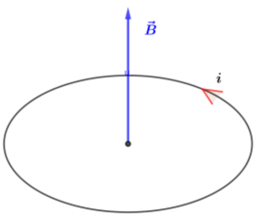
a) da 0,0 ms a 3,0 ms;

b) da 3,0 ms a 5,0 ms;

c) da 5,0 ms a 10 ms.



Da 0 a 3, 0 ms B diminuisce, quindi il verso della corrente indotta è tale da opporsi a tale diminuizione (legge di Lenz). Se per esempio il campo magnetico $\vec{B}$ è diretto verso l'alto il verso della corrente indotta è antiorario (in modo da generare un campo magnetico indotto che ha lo stesso verso di $\vec{B}$, cosicchè può rallentare la diminuzione del suo modulo):



Da 3 a 5 ms B aumenta, quindi il verso della corrente indotta è tale da opporsi a tale aumento (legge di Lenz). Mentre il campo magnetico $\vec{B}$ è diretto verso l'alto il verso della corrente indotta è orario (in modo da generare un campo magnetico indotto che ha verso opposto a quello di $\vec{B}$, cosicchè può rallentare l'aumento del suo modulo).

Da 5 a 10 ms il verso della corrente è come nel primo caso.

Calcoliamo ora la corrente media nei tre intervalli di tempo richiesti, indicando con S l'area della superficie racchiusa dalla spira, pari a $30\ cm^2 = (30) \cdot (10^{-2})^2\ m^2 = 3 \cdot 10^{-3}\ m^2$ e con R la resistenza della spira pari a $4.0\ m\Omega = 4.0 \cdot 10^{-3}\ \Omega$.

$$a)\ \ i_M = \frac{fem}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta(BS)}{\Delta t} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{S \cdot \Delta(B)}{\Delta t} =$$

$$= -\frac{1}{4.0 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{(-0.20 \cdot 10^{-3} - 0)(3 \cdot 10^{-3})}{(3.0 - 0.0) \cdot 10^{-3}}\ A = 0.05\ \ A$$

$$b)\ \ i_M = -\frac{1}{R} \cdot \frac{S \cdot \Delta(B)}{\Delta t} = -\frac{1}{4.0 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{(0.20 \cdot 10^{-3} + 0.20 \cdot 10^{-3})(3 \cdot 10^{-3})}{(5.0 - 3.0) \cdot 10^{-3}}\ A = -0.15\ A$$

$c)\ i_M = -\frac{1}{R} \cdot \frac{S \cdot \Delta(B)}{\Delta t} = -\frac{1}{4.0 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{(0.0 - 0.20 \cdot 10^{-3})(3 \cdot 10^{-3})}{(10.0 - 5.0) \cdot 10^{-3}}\ A = 0.03\ A$

QUESITO 7

In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2,0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità $v = 0{,}80\ c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

La velocità media v_L rispetto al laboratorio è: $v_L = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{25 \cdot 10^{-2}}{2.0 \cdot 10^{-9}}\ \frac{m}{s} = 1.25 \cdot 10^8\ m/s$

La velocità media v_N rispetto alla navicella, in base alle trasformazioni di Lorentz, è:

$$v_N = \frac{v_L - v}{1 - \frac{v \cdot v_L}{c^2}} = \frac{1.25 \cdot 10^8 - 0.80 \cdot 2.998 \cdot 10^8}{1 - \frac{0.80 \cdot 1.25 \cdot 10^8}{2.998 \cdot 10^8}}\ \frac{m}{s} = -1.72 \cdot 10^8\ m/s$$

Calcoliamo la distanza che misurerebbe un osservatore posto sulla navicella. Sempre per le trasformazioni di Lorentz abbiamo:

$s = \gamma(s_0 - vt_0),$

$con\ s_0 = 0.25\ m \quad e \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong 1.667, \quad v = 0.80\ c \cong 2.398 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}, \quad t_0 = 2 \cdot 10^{-9}\ s$

$s = \gamma(s_0 - vt_0) = 1.667\ (0.25 - 2.398 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-9})\ m \cong -0.383\ m$

Un osservatore posto sulla navicella misurerebbe quindi una distanza di circa 38 cm.

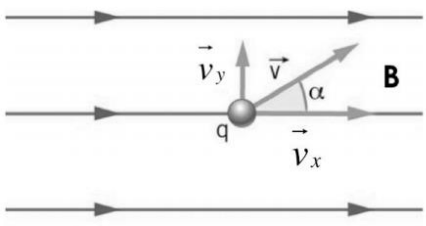
Calcoliamo l'intervallo di tempo che misurerebbe un osservatore posto sulla navicella. Sempre per le trasformazioni di Lorentz abbiamo:

$$\Delta t = \gamma\left(t_0 - \frac{v \cdot s_0}{c^2}\right) = 1.667\ \left(2 \cdot 10^{-9} - \frac{0.80 \cdot 0.25}{2.998 \cdot 10^8}\right)\ s \cong 2.22 \cdot 10^{-9} s = 2.22\ ns$$

Un osservatore posto sulla navicella misurerebbe quindi un intervallo di tempo di circa 2.2 ns.

QUESITO 8

Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $|\vec{B}| = 1{,}00$ mT. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 38{,}1$ cm, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio $r = 10{,}5$ cm e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con $\vec{B}$.



$B = 1.00mT = 10^{-3}T,\qquad \Delta x = 38.1\ cm = 0.381\ m\ \ ,\ \ r = 0.105\ \ m$

Detta v_x la componente di $\vec{v}$ lungo la direzione del campo magnetico, T il periodo di rotazione del protone, ω la velocità angolare del protone, si ha:

$$\Delta x = v_x \cdot T = v_x \cdot \frac{2\pi}{\omega}\ ,\ \ v_x = \ \Delta x \cdot \frac{\omega}{2\pi}$$

Sia v_y la componente di $\vec{v}$ ortogonale a $\vec{B}$. Per la legge di Lorentz abbiamo:

$$qv_yB = ma = \frac{mv_y^2}{r},\qquad da\ cui\colon\ v_y = \frac{qBr}{m} = \omega r\colon\qquad \omega = \frac{qB}{m}\ ,\ \ quindi\colon$$

$$v_x = \ \Delta x \cdot \frac{\omega}{2\pi} = v_x = \ \Delta x \cdot \frac{qB}{2\pi m} = \frac{0.381 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 1.673 \cdot 10^{-27}}\ \ \frac{m}{s} \cong 5.81 \cdot 10^3 \frac{m}{s} = v_x$$

$$v_y = \frac{qBr}{m} = \frac{1.602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3} \cdot 0.105}{1.673 \cdot 10^{-27}}\ \frac{m}{s} \cong 1.01 \cdot 10^4\ \frac{m}{s} = v_y$$

Quindi il modulo del vettore velocità è:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(5.81 \cdot 10^3)^2 + (1.01 \cdot 10^4)^2} \cong 1.17 \cdot 10^4\ \frac{m}{s} = v$$

L'angolo α che il vettore velocità forma con il vettore campo è tale che:

$$tg\ \alpha = \frac{v_y}{v_x} \cong \frac{1.01 \cdot 10^4}{5.81 \cdot 10^3} = \frac{10.1}{5.81} \cong 1.74 \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctg\ (1.74) \cong 60.1°$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria e Stefano Scoleri