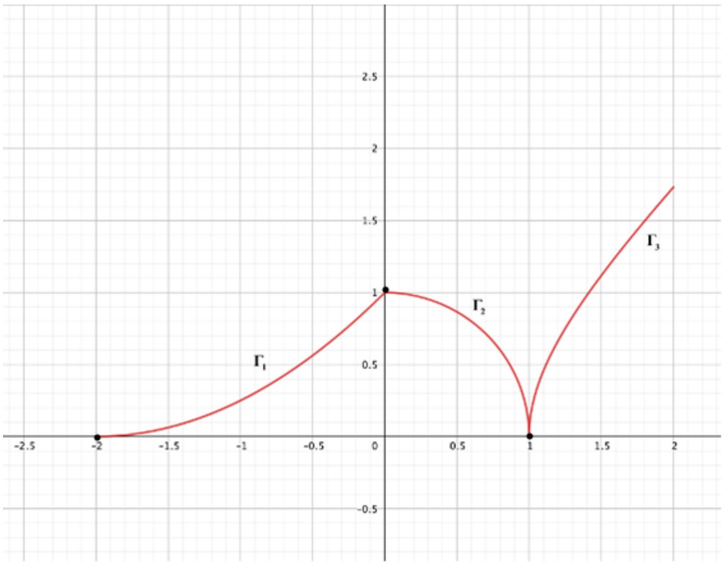
LICEO SCIENTIFICO 2023 - PROBLEMA 1

Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y = f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1, dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3.



a)

Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo [−2;2], utilizzando le equazioni:

$$y = a(x+2)^2\,,\ x^2 + y^2 + b = 0\,,\ x^2 - y^2 + c = 0$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali a, b, c.

Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Equazione parabola: se x=0 è y=1, quindi: $1 = 4a$, $a = \frac{1}{4}$ => $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$
Equazione circonferenza: essendo $x^2 + y^2 = -b = R^2 = 1$ $(b = -1)$ => $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sqrt{1 - x^2}$
Equazione iperbole: passaggio per (1;0), $1 + c = 0, c = -1$ => $x^2 - y^2 = 1$, $y = \sqrt{x^2 - 1}$

La funzione ha quindi la seguente espressione analitica:

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & ,\ se\ -2 \le x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & ,\ se\ 0 \le x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & ,\ se\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione è continua nel suo dominio [-2; 2].

Studiamo la derivabilità nei punti richiesti.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) \quad , \ se -2 \le x < 0 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \ se\ 0 < x < 1 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad , \ se\ 1 < x \le 2 \end{cases}$$

In $x = -2$ la funzione è derivabile (da destra) e la semitangente destra ha equazione $y = 0$.

In $x = 0$ calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra. Dalla parabola otteniamo:
$y' = \frac{1}{2}(x+2) \ \ , \ quindi \ \ y'_-(0) = 1.$

La derivata destra in x=0 è 0 (tangente orizzontale all'arco di circonferenza): $y'_+(0) = 0$. La funzione non è quindi derivabile in x=0, dove c'è un punto angoloso con semitangente sinistra di coefficiente angolare 1, quindi ha equazione: $y - 1 = (x - 0), y = x + 1$. La semitangente destra ha equazione $y = 1$.

In $x = 1$, secondo le proprietà grafiche della circonferenza e dell'iperbole, abbiamo tangente verticale (quindi punto di non derivabilità) e precisamente: $y'_-(1) = -\infty$, $y'_+(1) = +\infty$ (quindi cuspide verso il basso). Se vogliamo eseguire i calcoli, abbiamo:

per l'arco di circonferenza $y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\ e\ calcolando\ il\ limite\ per\ x\ che\ tende\ a\ 1^-\ abbiamo$ $y'_-(1) = -\infty$; per l'arco di iperbole: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ $e\ calcolando\ il\ limite\ per\ x\ che\ tende\ a\ 1^+\ abbiamo$ $y'_+(1) = +\infty$. La tangente in $x = 1$ ha equazione $x = 1$.

In $x = 2$, punto dell'iperbole con ordinata $y = \sqrt{3}$, possiamo solo parlare di derivata sinistra e risulta: $y'_-(2) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$: la funzione è quindi derivabile da sinistra e la tangente nel punto di ascissa 2 ha equazione $y - \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(x-2), \ \ y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

b)

A partire dal grafico della funzione f, dedurre quello della sua derivata f ' e individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$.

Per dedurre il grafico della derivata di f dal grafico di f osserviamo quanto segue:

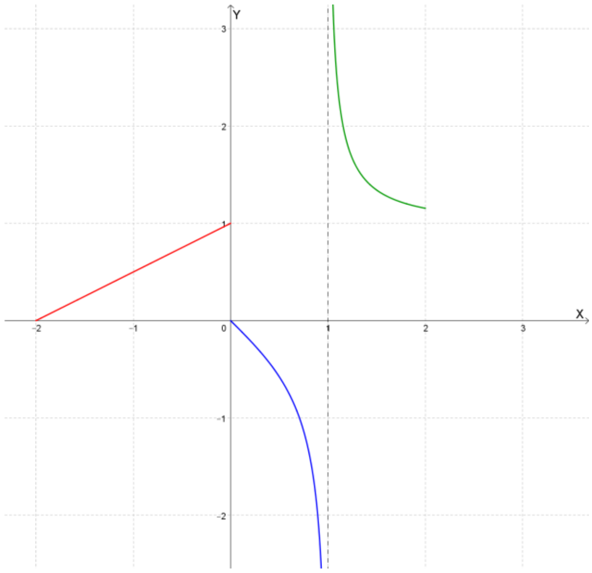
Il dominio è
$-2 \le x < 0, \qquad 0 < x < 1, \qquad 1 < x \le 2$

$f' > 0\ dove\ f\ cresce$, quindi per $-2 \le x < 0,\ 1 < x \le 2$

Per i limiti teniamo presente quanto già detto nello studio della derivabilità.

f' cresce dove la sua derivata è positiva; ma la sua derivata è f'', che è positiva dove il grafico di f volge la concavità verso l'alto (quindi per $-2 \le x < 0$).

Riassumendo quanto detto, il grafico di f' è quindi del tipo:



Deduciamo ora la concavità e la convessità della funzione integrale $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$ a partire dal grafico di f.

Ricordiamo che, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, essendo f continua in [-2; 2], la funzione integrale suddetta è derivabile (quindi anche continua) nello stesso intervallo e risulta:
$F'(x) = f(x)$

Per studiare la concavità di F analizziamo la sua derivata seconda: $F'(x) = f(x),\ F''(x) = f'(x)$.
Da quanto detto sopra riguardo alla f', deduciamo che:
$F''(x) \geq 0\ per -2 \leq x < 0\ \ e\ \ 1 < x \leq 2$: in tali intervalli il grafico di F ha la concavità verso l'alto (convessa), $per\ 0 < x < 1$ il suo grafico volge la concavità verso il basso (concava).

c)

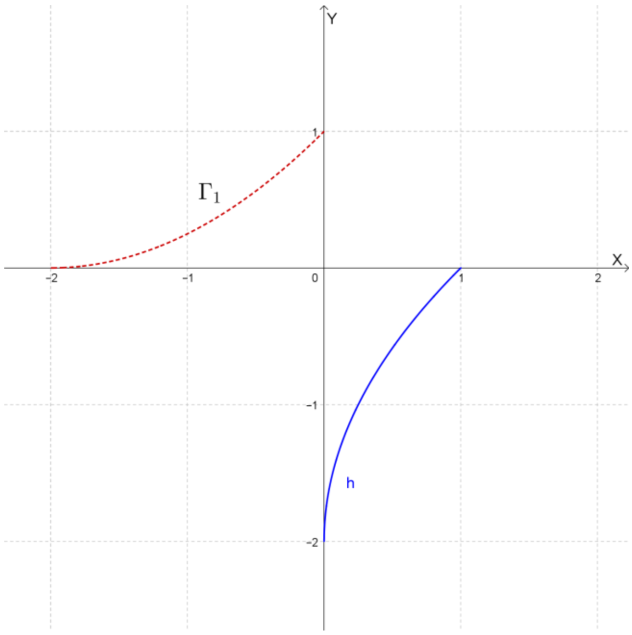
Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$, definita nell'intervallo $[-2;0]$, di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h. Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.

La funzione è invertibile perchè il suo grafico (nell'intervallo richiesto) è strettamente crescente, quindi la funzione è biunivoca.
Determiniamo l'equazione della funzione inversa.
$4y = (x+2)^2, \qquad x + 2 = 2\sqrt{y}\ \ (ricordiamo\ che\ x + 2 \geq 0), \qquad x = 2\sqrt{y} - 2.\ Quindi:$

$h(x) = 2\sqrt{x} - 2$

Risulta: $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ , quindi\ h\ non$ è $derivabile\ in\ x = 0$ e risulta $h'_+(0) = +\infty$.

Il grafico di h è simmetrico di Γ_1 rispetto alla retta $y = x$, quindi è il seguente (in blu nel quarto quadrante):



d)

Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida $\mathcal{S}$ in due regioni equivalenti.

Facendo riferimento alla figura precedente, dobbiamo determinare k (che è un valore fra -2 e 0) in modo che:

$$\int_{-2}^{k} \frac{1}{4}(x+2)^2\,dx = \int_{k}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2\,dx$$

$$\left[\frac{1}{12}(x+2)^3\right]_{-2}^{k} = \left[\frac{1}{12}(x+2)^3\right]_{k}^{0}, \quad (k+2)^3 = 8-(k+2)^3, \qquad (k+2)^3 = 4, \qquad k = \sqrt[3]{4}-2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria