# LICEO SCIENTIFICO 2023 - PROBLEMA 2

*Fissato un parametro reale a, con $a \neq 0$, si consideri la funzione $f_a$ così definita:*

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

*il cui grafico sarà indicato con $\Omega_a$.*

## a)

*Al variare del parametro a, determinare il dominio di $f_a$ , studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.*

**Dominio e discontinuità**: $x^2 - a \neq 0, x^2 \neq a$ Dobbiamo distinguere due casi.

Caso1, $a < 0$, il dominio è tutto R (la funzione è continua su tutto R).

Caso 2: $a > 0$, il dominio è $x \neq \pm\sqrt{a}$. In tal caso la funzione è discontinua per $x = \pm\sqrt{a}$; studiamo la specie di discontinuità.

Punto $x = \sqrt{a}$. Risulta:

$\lim_{x\to\sqrt{a}} \frac{x^2-ax}{x^2-a} = \left[\frac{a-a\sqrt{a}}{0}\right]; se\ a \neq 1$ tale limite è infinito (discontinuità di seconda specie), se a=1 il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$; per a=1 abbiamo:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} \quad (discontinuità\ eliminabile, terza\ specie)$$

Punto $x = -\sqrt{a}$ . Risulta:

$\lim_{x\to-\sqrt{a}} \frac{x^2-ax}{x^2-a} = \left[\frac{a+a\sqrt{a}}{0}\right] = \infty\ perchè\ il\ numeratore\ è\ sempre\ maggiore\ di\ zero$ (discontinuità di seconda specie).

**Asintoti:**

Per a<0 il dominio è tutto R, quindi non ci sono asintoti verticali ed essendo $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-ax}{x^2-a} = 1$ abbiamo l'asintoto orizzontale y=1 per $x \to \pm\infty$.

Per a>0 c'è ancora l'asintoto orizzontale y=1 visto per a<0 ma potrebbero esserci asintoti verticali. In base allo studio della continuità fatto sopra, abbiamo l'asintoto verticale $x = \sqrt{a}$ se $a \neq 1$ e l'asintoto verticale $x = -\sqrt{a}$ per ogni $a > 0$.

## b)

*Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici $\Omega_a$ intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.*

Abbiamo visto che per ogni a non nullo le curve hanno l'asintoto orizzontale $y = 1$. Cerchiamo le intersezioni di tale asintoto con il grafico delle funzioni.

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{x^2-ax}{x^2-a} \end{cases} ; \ \frac{x^2-ax}{x^2-a} = 1 , \ x^2 - ax = x^2 - a \ \ (con \ \ x^2 \neq a), -ax = -a : x = 1 \ \ (con \ a \neq 1)$$

**N.B.** Se fosse $a = 1$, avremmo $\frac{x^2-x}{x^2-1} = 1, \frac{x}{x+1} = 1, x = x + 1, 0 = 1$! La curva non interseca il suo asintoto orizzontale.

Quindi tutti i grafici intersecano il proprio asintoto orizzontale nello stesso punto (1; 1), per $a \neq 1$

Cerchiamo la tangente nell'origine (che appartiene a tutte le curve):

$$y' = \frac{(2x-a)(x^2-a)-(x^2-ax)(2x)}{(x^2-a)^2} = \frac{2x^3-2ax-ax^2+a^2-2x^3+2ax^2}{(x^2-a)^2};$$

$$y' = \frac{-2ax+a^2+ax^2}{(x^2-a)^2}; \ \ y'(0) = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Osserviamo che se $a = 1$ risulta:

$$y' = \frac{-2x+1+x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \ \text{ ed è ancora } y'(0) = 1.$$

Quindi nell'origine tutti i grafici condividono la tangente di equazione $y = x$ (per $a \neq 1$)

## c)

*Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione $f_a$ . Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico $\Omega_{-1}$.*

$$y' = \frac{-2ax+a^2+ax^2}{(x^2-a)^2} > 0, \qquad a(x^2-2x+a) > 0, \qquad con \ \ x^2 - a \neq 0$$

**Caso 1**: $0 < a < 1$

$a(x^2-2x+a) > 0$ se $x^2-2x+a > 0$ , $x < 1-\sqrt{1-a}$ $\ vel \ $ $x > 1+\sqrt{1-a}$ . In tali intervalli la funzione è crescente, nella parte rimanente del dominio è decrescente.

**Caso 2**: $a < 0$

$a(x^2-2x+a)>0$ se $x^2-2x+a<0$: $1-\sqrt{1-a}<x<1+\sqrt{1-a}$. In tale intervallo la funzione è crescente, nella parte rimanente del dominio è decrescente.

**Dobbiamo ora studiare la funzione per $a=-1$.**

$$y=f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$$

Dominio: R (dove è continua e derivabile)

Asintoto orizzontale $y=1$

Studio derivata prima (già calcolata con a generico, quindi basta porre in essa $a=-1$)

$$y'=\frac{-(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}>0\ quando\ \ -x^2+2x+1>0, \qquad x^2-2x-1<0$$

$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$: in tale intervallo la funzione è crescente, pertanto avremo un minimo relativo (che sarà anche assoluto) per $x=1-\sqrt{2}$ ed un massimo relativo (che sarà anche assoluto) per $x=1+\sqrt{2}$.

Studio derivata seconda:

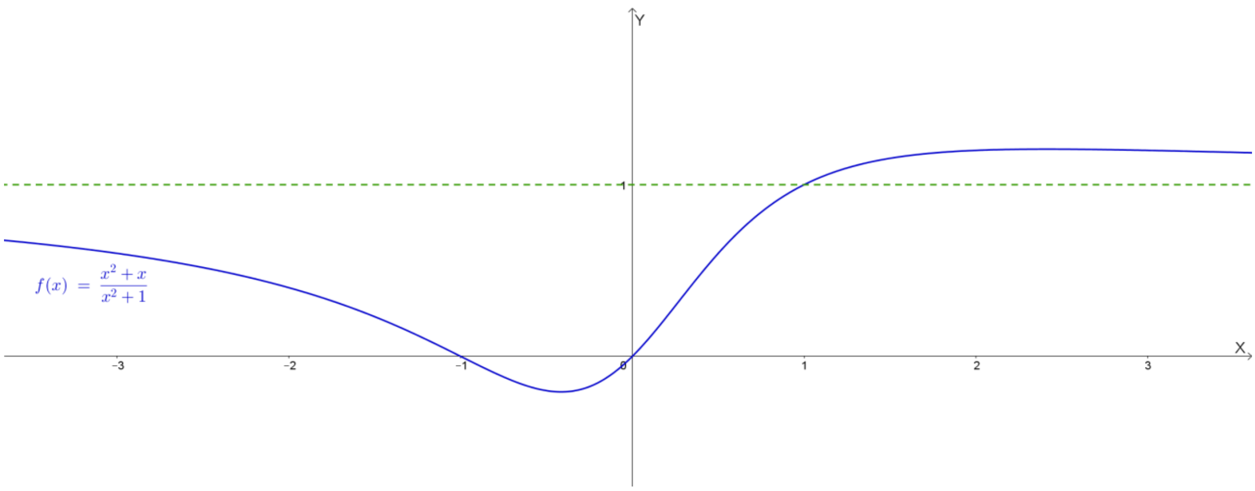
$$y''=\frac{2(x^3-3x^2-3x+1)}{(x^2+1)^3}=\frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}>0\ se\ (x+1)(x^2-4x+1)>0.$$

Risolvendo la disequazione si ottiene:

$y''>0\ \ se\ \ -1<x<2-\sqrt{3}\ \ vel\ \ x>2+\sqrt{3}$ . In tali intervalli il grafico volge la concavità verso l'alto, nella parte rimanente del dominio verso il basso. Perciò si hanno i seguenti punti di flesso:

$x=-1,\ \ x=2-\sqrt{3}\,,\ \ x=2+\sqrt{3}$

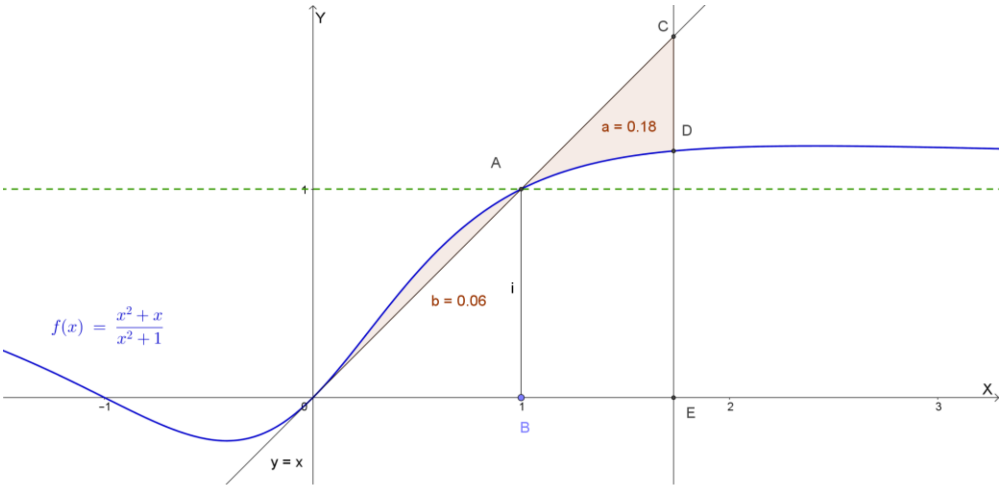
Il grafico della funzione è il seguente:



## d)

*Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico $\Omega_{-1}$, la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.*

Ricordiamo che la tangente nell'origine (trovata per ogni valore di a) ha equazione $y = x$.




L'area richiesta si ottiene calcolando i seguenti integrali:

$$Area = b + a = \int_0^1 \left(\frac{x^2+x}{x^2+1} - x\right) dx + \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^2+x}{x^2+1}\right) dx$$

Calcoliamo il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x^2+x}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1+x}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= x - arctg(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

Quindi:

$$Area = -\left[\frac{x^2}{2} - x + arctg(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x + arctg(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= -\left[\tfrac{1}{2} - 1 + arctg(1) - \tfrac{1}{2}\ln(2) - 0\right] + \left[\tfrac{3}{2} - \sqrt{3} + arctg(\sqrt{3}) - \tfrac{1}{2}\ln(4) - \tfrac{1}{2} + 1 - (arctg(1) + \tfrac{1}{2}\ln(2)\right] =$$

$$=$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\ln(2)\right) + \left(2 - \sqrt{3} + \tfrac{\pi}{3} - \tfrac{1}{2}\ln(2) - \tfrac{\pi}{4}\right) = \left(\tfrac{5}{2} - \tfrac{\pi}{6} - \sqrt{3}\right) u^2 \cong 0.24\ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria