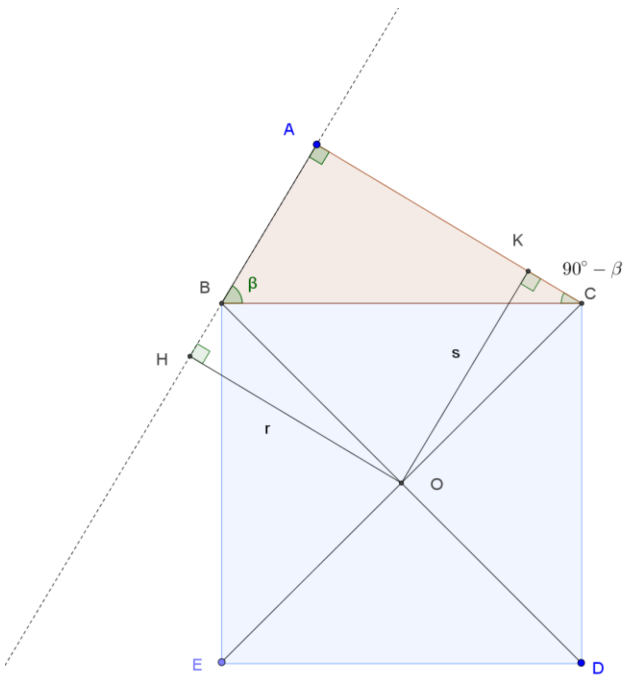
LICEO SCIENTIFICO 2023 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Sia O il centro del quadrato BCDE costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A.
Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC.



I triangoli (rettangoli) BOH e COK sono congruenti, avendo uguale ipotenusa (OB e OC, metà diagonale del quadrato) ed uguali gli angoli HBO e KCO, poiché:

$$H\hat{B}O = 180° - O\hat{B}C - \beta = 180° - 45° - \beta = 135° - \beta$$

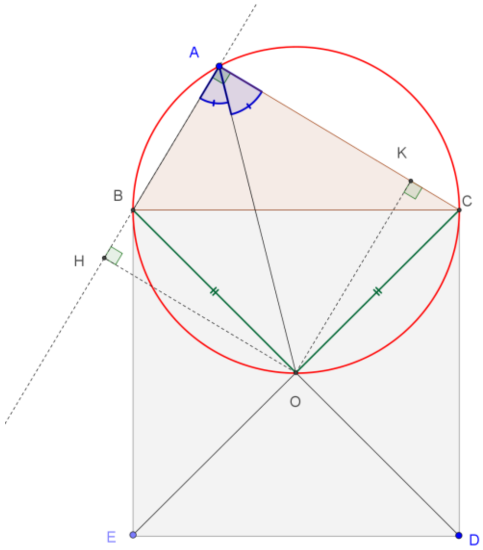
$$K\hat{C}O = 90° - \beta + 45° = 135° - \beta$$

Pertanto i lati corrispondenti OH e OK sono congruenti, e questa è la nostra tesi.

Soluzione alternativa geometrica

Dimostrare che O sia equidistante dalle rette AB e AC equivale a dimostrare che O appartiene alla bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$, infatti la bisettrice di un angolo è il luogo dei punti equidistanti dai suoi lati.

Siccome le diagonali di un quadrato sono perpendicolari, nel quadrilatero ABOC gli angoli opposti al vertice sono (in A e O) sono retti, quindi supplementari.



Poiché la somma degli angoli interni di un quadrilatero è uguale a due angoli piatti, ne consegue che anche gli angoli in B e C del suddetto quadrilatero sono supplementari. Per una nota proprietà della circonferenza il quadrilatero ABOC è quindi inscrittibile in una circonferenza. Ma le corde BO e CO sono uguali, essendo entrambi uguali alla metà della diagonale del quadrato. Gli angoli $B\hat{A}O$ e $C\hat{A}O$ insistono perciò su archi uguali (quelli sottesi dalle corde uguali BO e CO). Questo dimostra che O è equidistante dalle rette AB e AC.

Soluzione alternativa trigonometrica

Abbiamo visto nella prima soluzione che

$$H\hat{B}O = K\hat{C}O = 135° - \beta$$

Quindi, per un noto teorema sui triangoli rettangoli risulta:
dal triangolo HBO: $OH = OB\sin(H\hat{B}O) = OB\sin(135° - \beta)$
dal triangolo KCO: $OK = OC\sin(K\hat{C}O) = OC\sin(135° - \beta)$
Ma $OB = OC$, quindi $OH = OK$.

QUESITO 2

Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:

a) un numero primo

b) un numero almeno pari a 3

c) un numero al più pari a 3

Indicando con p(i) la probabilità che esca la faccia i, abbiamo:

$p_1 = p(1) = p(3) = p(5),\ \ p_2 = p(2) = p(4) = p(6), \qquad 3p_1 + 3p_2 = 1, \qquad p_2 = 2p_1$

Segue facilmente che $9p_1 = 1,\ p_1 = \frac{1}{9} \quad e \quad p_2 = \frac{2}{9}$.

a) La probabilita che esca un numero primo è : $p(esca\ il\ 2, il\ 3\ o\ il\ 5) = 2p_1 + p_2 = \frac{4}{9}$.

b) La probabilità che esca un numero almeno pari a 3 è data da:

$p(esce\ 3\ o\ 4\ o\ 5\ o\ 6) = 2p_1 + 2p_2 = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

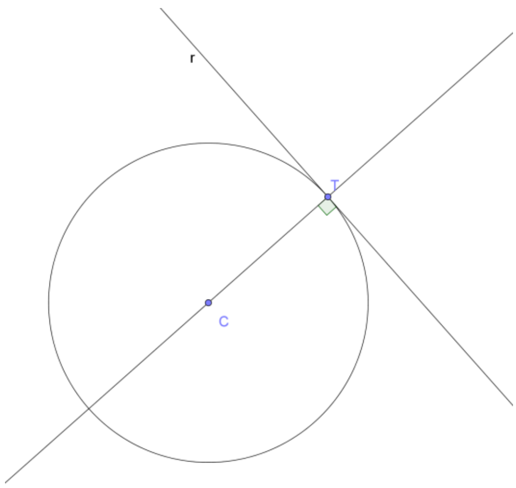
c) La probabilità che esca un numero al più uguale a 3 è data da:

$p(esce\ 1\ oppure\ 2\ oppure\ 3) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

QUESITO 3

Considerata la retta r passante per i due punti $A(1,-2,0)$ e $B(2,3,-1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1,-6,7)$ e tangente a r.

A=(1,-2,0) e B=(2, 3, -1), C=(1, -6 7).



La retta r passante per A e B ha vettore $\vec{v} = (2-1, 3+2, -1-0) = (1, 5, -1)$.
Il piano α passante per C e perpendicolare ad r ha il vettore normale uguale a quello di r e quindi:

α: $1(x-1) + 5(y+6) - 1(z-7) = 0, \qquad quindi$: $x + 5y - z + 36 = 0$

L'intersezione T tra r ed α è il punto di tangenza tra la retta e la sfera. Scriviamo l'equazione della retta r in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \\ z = -t \end{cases}$$

Quindi:

$$T: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \\ z = -t \\ x + 5y - z + 36 = 0 \end{cases}$$

Da cui: $(1 + t) + 5(-2 + 5t) - (-t) + 36 = 0, \dots, \; t = -1.\; Quindi: \; T = (0, -7, 1)$

Il raggio della sfera è pari alla distanza di C da T:

$$R^2 = (1 - 0)^2 + (-6 + 7)^2 + (7 - 1)^2 = 1 + 1 + 36 = 38.$$

Equazione sfera: $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 + (z - 7)^2 = 38$

N.B.

Allo stesso risultato si può arrivare risolvendo il sistema:

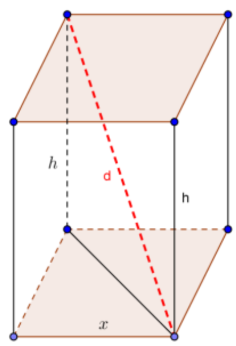
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \\ z = -t \\ (x - 1)^2 + (y + 6)^2 + (z - 7)^2 = R^2 \end{cases}$$

Sostituendo x, y e z nella quarta equazione si ottiene un'equazione di secondo grado in t e ponendo $\Delta = 0$ si ottiene $R^2 = 38$.

QUESITO 4

Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V, stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

Indichiamo con d la diagonale del parallelepipedo, con x (con x>0) il lato del quadrato di base e con h l'altezza. Risulta:



Cerchiamo la minima superficie totale S di un parallelepipedo a base quadrata di dato volume V.

$V = x^2 h$ (con x ed h positivi)

$S = 2(x^2) + 4hx = 2x^2 + 4x\,\frac{V}{x^2} = 2x^2 + \frac{4V}{x}$

Risulta: $S' = 4x - \frac{4V}{x^2} \geq 0\ \ se\ \ x^3 - V \geq 0, x^3 \geq V:\quad x \geq \sqrt[3]{V}$

S è quindi decrescente se: $0 < x \leq \sqrt[3]{V}$ e crescente per $x \geq \sqrt[3]{V}$.

S è pertanto minima se $x = \sqrt[3]{V}$ (si tratta del cubo)

Dobbiamo ora vedere quando è minima la diagonale del parallelepipedo di volume V.

$d = \sqrt{h^2 + \left(x\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{V}{x^2}\right)^2 + 2x^2}\ che\ è\ minima\ se\ lo\ è\ d^2 = y.$

$y = \frac{V^2}{x^4} + 2x^2$

$y' = -\frac{4V^2}{x^5} + 4x \geq 0\ \ se - 4\,V^2 + 4x^6 \geq 0\ \ (ricordiamo\ che\ x > 0);$

$x^6 \geq V^2\ che\ equivale\ a\ \ x^3 \geq V$ come nel caso della superficie totale minima.

Quindi quando la superficie totale è minima anche la diagonale è minima e ciò avviene nel caso in cui il parallelepipedo è un cubo di lato $\sqrt[3]{V}$.

Soluzione alternativa col metodo elementare (sintetico)

Come visto precedentemente si ha:

$$S_T = 2x^2 + \frac{4V}{x}$$

Osserviamo che:

$(2x^2)^1 \cdot \left(\frac{4V}{x}\right)^2 = 32V^2 = costante.$

In base ad una proprietà sui massimi e minimi con metodo elementare sappiamo che:
"se il prodotto delle potenze di due grandezze è costante, la somma delle basi è minima quando le basi sono proporzionali agli esponenti", come dire che se $x^a y^b = costante, x + y = minimo\ se \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

Nel nostro caso il prodotto di due potenze di $2x^2$ e di $\frac{4V}{x}$ (con esponenti 1 e 2) è costante, quindi la somma

$$2x^2 + \frac{4V}{x}$$

È minima se: $\frac{2x^2}{1} = \frac{\frac{4V}{x}}{2}$ da cui: $2x^2 = \frac{2V}{x}$, $x^3 = V\ \Rightarrow x = \sqrt[3]{V}$.
Pertanto:

$S_T = 2x^2 + \frac{4V}{x}$ è minima se $x = \sqrt[3]{V}$, come visto precedentemente.

In modo analogo si può ragionare per il minimo della diagonale.

Abbiamo visto che:

$d=\sqrt{h^2+\left(x\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{V}{x^2}\right)^2+2x^2}\ che\ è\ minima\ se\ lo\ è\ d^2=y.$

$y=\left(\frac{V}{x^2}\right)^2+2x^2=\boldsymbol{\frac{V^2}{x^4}+2x^2}$.

Osserviamo che: $\left(\frac{V^2}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(2x^2)^1=2V=costante$, quindi la somma $\boldsymbol{\frac{V^2}{x^4}+2x^2}$ è minima quando:

$\frac{\frac{V^2}{x^4}}{\frac{1}{2}}=\frac{2x^2}{1}$, $da\ cui$: $2V^2=2x^6$, $V^2=x^6$ $\Rightarrow x^3=V, x=\sqrt[3]{V}$ (come visto precedentemente).

Pertanto quando è minima la superficie totale di un parallelepipedo di dato volume V è minima anche la diagonale ed il parallelepipedo che realizza il minimo della superficie totale e della diagonale è il cubo di spigolo $\sqrt[3]{V}$.

Nota: altri esempi analoghi di risoluzione elementare si trovano nel Problema 2 dell'Esame di Stato dell'anno 2001, sessione suppletiva de PNI e nel Quesito 1 della Sessione Straordinaria di ordinamento del 2009.

QUESITO 5

Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y=\sqrt{25-x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

Si ha: $\begin{cases} y\geq 0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$: semicirconferenza con centro nell'origine e raggio 5 situata sopra l'asse x.

Il punto di ascissa 3 è : $T=(3;4)$. Usando il metodo dello sdoppiamento si ottiene facilmente l'equazione della tangente in T:

$$x_T x+y_T y=25, \qquad 3x+4y=25, \qquad y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$$

Utilizzando il metodo delle derivate.

$$y'=\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

Il coefficiente angolare della tangente richiesta è $y'(3)=-\frac{3}{4}$. La tangente è la retta per T con questo coefficiente angolare: $y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$, $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$.

QUESITO 6

Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-(ax^3+bx)}{x^3}=1$$

Primo metodo (con regola di De l'Hospital).

Osserviamo che il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e che le funzioni al numeratore e al denominatore sono continue e derivabili in un intorno dello zero (zero escluso), inoltre la derivata del denominatore, $3x^2$ si annulla solo per x=0, quindi è diversa cda zero in un intorno dello zero, zero escluso (come richiede il Teorema di De l'Hospital). Calcoliamo il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-3ax^2-b}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+1-3ax^2-b}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-1}{3x^2}+\frac{1-b-3ax^2}{3x^2}\right]=$$

$=-\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-b-3ax^2}{3x^2}\right]=1\quad se\quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-b-3ax^2}{3x^2}\right]=\frac{7}{6}$ e ciò avviene se $1-b=0,\ b=1\ e$

$-\frac{3a}{3}=\frac{7}{6}, da\ cui\ a=-\frac{7}{6}$

N.B. $\frac{1-\cos x}{x^2}$ per x che tende a zero tende a $\frac{1}{2}$, quindi $\frac{\cos x-1}{3x^2}$ tende a $-\frac{1}{6}$

Il limite richiesto quindi è 1 se $a=-\frac{7}{6}\ e\ b=1.$

N.B.

Il limite può essere calcolato applicando ancora il Teorema di De l'Hospital.

Applicandolo una prima volta si arriva al limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-3ax^2-b}{3x^2}$$

Tale limite, se $b\neq 1$, è ∞ (si ha la forma $\frac{1-b}{0}$, che con $b\neq 1$ è ∞); dovremmo quindi concludere che il limite richiesto non è 1 ma ∞ . Per poter essere 1 il limite, deve quindi essere necessariamente $b=1$. Con tale valore di b ci troviamo di fronte al seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-3ax^2-1}{3x^2}$$

che si presenta ancora nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Applichiamo ancora il Teorema di De l'Hospital, di cui sono sempre soddisfatte le ipotesi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - 6ax}{6x} = \left[F.I.\ \frac{0}{0}\right]$$

Ed infine, con un'ultima applicazione del Teorema di De l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x - 6a}{6} = 1 \quad se \quad \frac{-1-6a}{6} = 1, \qquad -1-6a = 6 \;\Rightarrow\; a = -\frac{7}{6}$$

Secondo metodo (con la regola di Taylor).

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^3)$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^3) - ax^3 - bx}{x^3}$$

Affinché tale limite sia uguale ad 1 il numeratore si deve comportare come x^3 e ciò si verifica se $b = 1$, e

$$-\frac{x^3}{3!} - ax^3 = x^3, \qquad -\frac{1}{6} - a = 1, \qquad a = -\frac{7}{6}$$

Il limite richiesto quindi è 1 se $a = -\frac{7}{6}$ $e\ b = 1$.

QUESITO 7

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + arctg\, x\,, & se\ x < 0 \\ ax + b, & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

Osserviamo che per ogni x diverso la zero la funzione è continua e derivabile (è formata da funzioni elementari sempre continue e derivabili nel loro dominio).
Punto da analizzare $x = 0$. Per essere derivabile è necessario che sia continua, quindi imponiamo che la funzione sia continua in $x = 0$.

Il limite sinistro per x che tende a zero è -1, il limite destro b, il valore della funzione in zero è b: quindi è continua se $b = -1$.

Analizziamo la derivabilità nello zero.

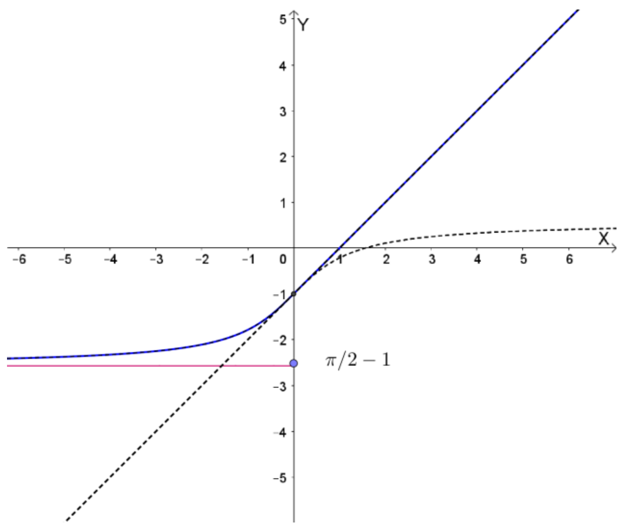
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}\,, & se\ x < 0 \\ a, & se\ x > 0 \end{cases}$$

La derivata sinistra nello zero vale 1, la destra a: quindi la funzione è derivabile se $a = 1$.

La funzione è quindi derivabile se $a = 1$ e $b = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} -1 + arctg\, x\,, & se\ x < 0 \\ x - 1, & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

Il grafico di tale funzione (in blu nella figura) è facilmente deducibile da funzioni note. Se $x \geq 0$ il grafico è una retta, se $x < 0$ il grafico è quello di $y = arctg\ x$ traslato verso il basso di 1 **(nel grafico il punto indicato sull'asse y sotto il -1 è $-\frac{\pi}{2} - 1$ $E\ NON$ $\frac{\pi}{2} - 1$ come indicato).**



La funzione è strettamente crescente, quindi non può esistere un intervallo [a; b] in cui $f(a) = f(b)$: pertanto la funzione non soddisfa il Teorema di Rolle in alcun intervallo del dominio.

QUESITO 8

Data la funzione $f(x) = x^5 - 5ax + a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

$$f(x) = x^5 - 5ax + a\,, \quad con\ a > 0$$

Dobbiamo determinare eventuali valori di a per cui la funzione ammetta tre zeri reali e distinti (cioè in modo che il suo grafico intersechi in tre punti distinti l'asse delle x).

Osserviamo che : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Affinchè ci siano tre intersezioni con l'asse delle x il grafico dovrà avere almeno un massimo ed un minimo relativi.

$$f'(x) = 5x^4 - 5a \geq 0 \ \ se\ x \leq -\sqrt[4]{a}\ \ vel\ \ x \geq \sqrt[4]{a}$$

La funzione quindi cresce fino a $-\sqrt[4]{a}$, decresce da $-\sqrt[4]{a}$ fino a $\sqrt[4]{a}$, cresce per $x > \sqrt[4]{a}$.

Abbiamo quindi un solo massimo relativo, per $x = -\sqrt[4]{a}$ ed un solo minimo relativo, per $x = \sqrt[4]{a}$

Siccome il grafico interseca l'asse delle y nel punto di ordinata $a > 0$, affinché ci siano tre intersezioni con l'asse x dobbiamo imporre che l'ordinata del massimo relativo sia maggiore di a e quella del minimo relativo sia minore di zero. Perciò:

$$f\left(-\sqrt[4]{a}\right) = \cdots = 4a\sqrt[4]{a} + a > a \; sempre \; se \; a > 0$$

$$f\left(\sqrt[4]{a}\right) = \cdots = -4a\sqrt[4]{a} + a < 0\,, \sqrt[4]{a} > \frac{1}{4}\,, \qquad a > \frac{1}{256}$$

La funzione ha quindi tre zeri distinti se $a > \frac{1}{256}$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria