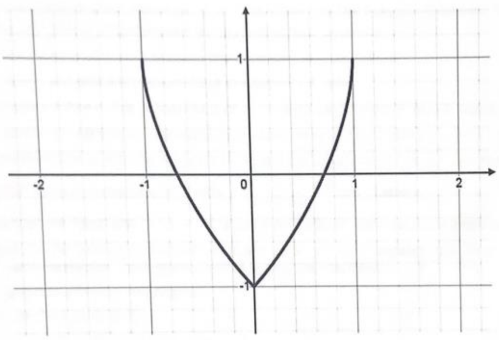
LICEO SCIENTIFICO 2024 - PROBLEMA 2

«All'inizio e alla fine, abbiamo il mistero. [...] A questo mistero la matematica ci avvicina, pur senza penetrarlo». (E. De Giorgi)

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, con $n \in N$, $n > 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

a) Verificare che, qualunque sia il valore di n, la funzione f_n non è derivabile nel punto di ascissa $x = 0$. Determinare il valore di n in corrispondenza del quale il grafico di f_n presenta un punto angoloso. Per opportuni valori dei parametri a, b, il grafico α, in figura, rappresenta la funzione $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$. Determinare i parametri a e b, considerando che f_2 è definita in $[-1; 1]$ e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



Si ponga, d'ora in avanti, $a = -1$, $b = 0$.

b) Studiare la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$, verificando che non è derivabile negli estremi del dominio e nel punto di ascissa $x = 0$. Indicare con β il suo grafico e tracciare la curva $\gamma = \alpha \cup \beta$.

c) La retta r, di equazione $x = k$, con $-1 < k < 1$, interseca γ nei punti P e Q. Dimostrare che la misura del segmento PQ è massima quando r è asse di simmetria di γ.

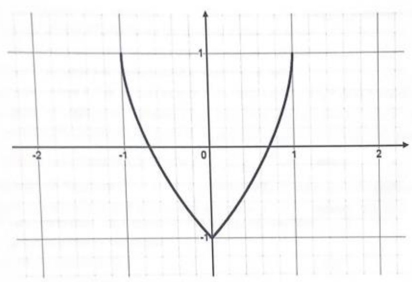
d) Verificare che la funzione $H(x) = \frac{1}{2}\left(arcsen(x) + x\sqrt{1 - x^2}\right)$ è una primitiva della funzione $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Con il metodo che si ritiene più opportuno, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ.

«Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle: le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è posto perenne per la matematica brutta». (G. H. Hardy)

a)

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, con $n \in N$, $n > 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

a) Verificare che, qualunque sia il valore di n, la funzione f_n non è derivabile nel punto di ascissa $x = 0$. Determinare il valore di n in corrispondenza del quale il grafico di f_n presenta un punto angoloso. Per opportuni valori dei parametri a, b, il grafico α, in figura, rappresenta la funzione $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$. Determinare i parametri a e b, considerando che f_2 è definita in $[-1; 1]$ e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



$f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}\,, con\ a, b\ \in \mathbb{R}\,, a < 0\,,\ n \in \mathbb{N}\,, n > 1$

Verifichiamo che per ogni valore di n la funzione non è derivabile nel punto di ascissa $x = 0$.

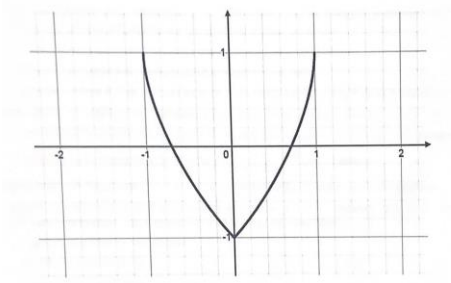
La funzione $y = \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ ha come derivata $y' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}$ ed è sempre $y'(0) = \frac{b}{2}$, quindi $y = \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ è sempre derivabile in $x = 0$.

Analizziamo la funzione $y = \sqrt[n]{x^2}$.

Se $n = 2$ risulta $y = |x|$, che non è derivabile in $x = 0$, dove c'è un punto angoloso (derivata destra 1 e derivata sinistra -1).
Se $n > 2$ risulta $y = x^{\frac{2}{n}}$ quindi: $y' = \frac{2}{n}x^{\frac{2}{n}-1} = \frac{2}{n}\frac{1}{x^{1-\frac{2}{n}}}$. Essendo $1 - \frac{2}{n} > 0$ si ha che $y'(0) = \infty$, quindi non è derivabile in $x = 0$.

Possiamo quindi concludere che $f_n(x)$ non è mai derivabile in $x = 0$ e per $n = 2$ si ha in $x = 0$ un punto angoloso.

Consideriamo ora la funzione $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, il cui grafico α è:



Dobbiamo trovare a e b sapendo che tale funzione è definita in $[-1; 1]$ e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Affinché il grafico sia simmetrico rispetto all'asse delle ordinate deve essere $f(-x) = f(x)$ e affinchè ciò si verifichi deve essere chiaramente $b = 0$. Perciò:

$f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + 1}$

Affinché il dominio sia $[-1; 1]$ dovrà essere $ax^2 + 1 \geq 0$ in tale intervallo e ciò avviene se $a = -1$.
Infatti se $a = -1$ $ax^2 + 1 = -x^2 + 1 \geq 0$ se $-1 \leq x \leq 1$. La funzione richiesta è quindi:

$f_2(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2}$

Si ponga, d'ora in avanti, $a = -1$, $b = 0$.

b)

Studiare la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$, verificando che non è derivabile negli estremi del dominio e nel punto di ascissa $x = 0$. Indicare con β il suo grafico e tracciare la curva $\gamma = \alpha \cup \beta$.

Studiamo la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$

Dominio: $-1 \leq x \leq 1$

Intersezioni con gli assi cartesiani

Se $x = 0,\ y = 1$. Se $y = 0,\ |x| + \sqrt{1-x^2} = 0$ mai (somma di quantità non negative che non si annullano mai contemporaneamente).

Segno della funzione

$|x| + \sqrt{1-x^2} \geq 0\ \forall\, x\ \in \mathit{dominio}$ (somma di quantità positive o nulle).

Simmetrie notevoli

La funzione è chiaramente pari: $f(-x) = f(x)$ quindi il suo grafico β è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Limiti e asintoti

La funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato (il dominio), quindi non occorre calcolare alcun limite e non ci sono asintoti.

Studio della derivata prima

$y = g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2}$

Essendo la funzione pari è sufficiente studiare la derivata prima per $x > 0$ (in $x = 0$ la funzione non è derivabile, come visto nel punto a).

Per $x > 0\ \ y = x + \sqrt{1-x^2};\ \ y' = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

Notiamo che la derivata prima non esiste per $x = 1$ ($e\ quindi\ neanche\ in\ x = -1$)

$y' \geq 0\ \ se\ \sqrt{1-x^2} - x \geq 0$ (con $0 < x < 1$); $\sqrt{1-x^2} \geq x\,,\ 1 - x^2 > x^2\,,\ x^2 \geq \frac{1}{2}$:

$0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$: quindi la funzione è crescente per $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e decrescente per $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$:

abbiamo quindi un massimo relativo per $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e, per la simmetria già evidenziata, anche per $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
L'ordinata dei due massimi relativi è:

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Risulta:

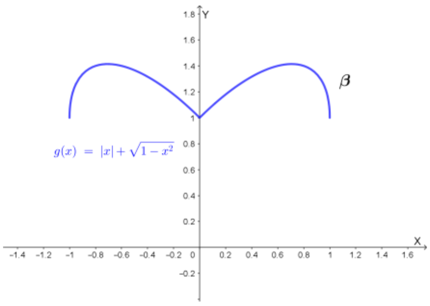
$$y' = \begin{cases} -1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & se -1 < x < 0 \\ \ \ 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & se\ \ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Quindi (oltre che in $x = \pm 1, come\ già\ osservato$) la funzione NON è derivabile in $x = 0$, dove c'è un punto angoloso. Infatti: $y'_-(0) = -1\ \ e\ \ y'_+(0) = 1$.
Notiamo che $x = \pm 1$ sono punti di non derivabilità con tangente verticale, essendo $y'(\pm 1) = \infty$.

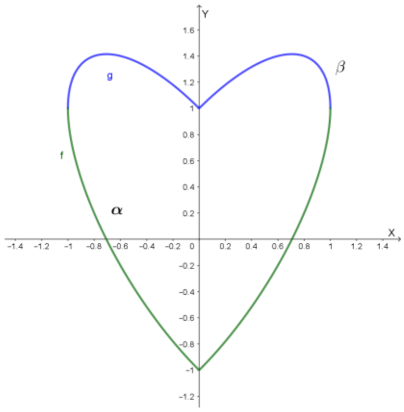
Studio della derivata seconda

Basta studiare la derivata seconda per $x > 0$, dove $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Risulta:
$y'' = D\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \cdots = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} < 0\ \ per\ ogni\ x\ tale\ che\ 0 < x < 1$ (quindi anche per $-1 < x < 0$ per la simmetria già evidenziata). In $x = 0$ non esiste la derivata seconda (perché $\nexists$ la derivata prima).

Possiamo concludere che il grafico della funzione volge sempre la concavità verso il basso e non ci sono flessi. Osservandi che $g(\pm 1) = 1$, il grafico β della funzione è il seguente:

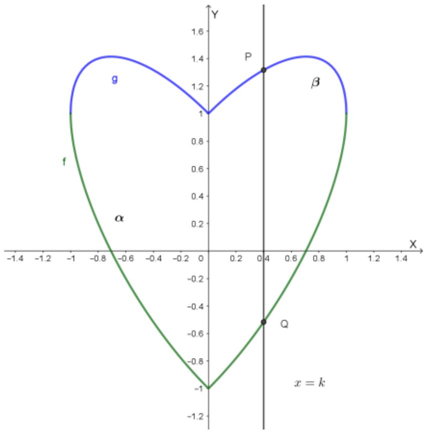


Il grafico di $\gamma = \alpha \cup \beta$ è il seguente:



c)

La retta r, di equazione $x = k$, con $-1 < k < 1$, interseca γ nei punti P e Q. Dimostrare che la misura del segmento PQ è massima quando r è asse di simmetria di γ.



Osserviamo che $\overline{PQ} = y_P - y_Q = g(k) - f_2(k) = |k| + \sqrt{1-k^2} - \left(|k| - \sqrt{1-k^2}\right) = 2\sqrt{1-k^2} = d$

$d' = \dfrac{-2k}{\sqrt{1-k^2}} \geq 0 \;\; se\; k \leq 0, \qquad nell'intervallo(-1;1)$

Quindi d è crescente se $-1 < k < 0$ e decrescente per $0 < k < 1$, ed ha un massimo relativo (che è anche assoluto) per $k = 0$. Osserviamo che in $k = \pm 1$ si ha $d = 0$, P e Q coincidono.

Quindi la distanza $\overline{PQ}$ è massima quando la retta r coincide con l'asse y, che è l'asse simmetria di γ.

d)

Verificare che la funzione $H(x) = \frac{1}{2}\left(arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)$ è una primitiva della funzione $h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Con il metodo che si ritiene più opportuno, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ.

Osserviamo che $h(x)$ è definita e continua per $-1 \leq x \leq 1$.

Verifichiamo che $H'(x) = h(x)$ per ogni x del dominio di h, cioè per $-1 \leq x \leq 1$.

$H'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$ se $-1 < x < 1$

Quindi per $-1 < x < 1 \quad H'(x) = h(x)$.

Notato che $h(\pm 1) = 0$, dimostriamo che anche in $x = \pm 1$ risulta $H'(x) = h(x) = 0$

$(\, in\ x = -1\ ci\ interessa\ la\ derivata\ destra\ di\ H, in\ x = +1\ la\ derivata\ sinistra).$

Notato che (in base al calcolo precedente) $H(x)$ è derivabile in un intorno sinistro di $x = 1$, 1 escluso, e continua in $x = 1$, applichiamo *Il criterio (sufficiente) di derivabilità* per stabilire che esiste $H'_-(1)$.

Si ha:

$$\lim_{x\to 1^-} H'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 = H'_-(1) = h(1).$$

Con ragionamento analogo si verifica che $\lim_{x\to(-1)^+} H'(x) = 0 = H'_+(-1) = h(-1)$.

(Tra l'altro $H(x)$è $dispari, perché$ $H(-x) = -H(x)\ quindi\ se\ esiste\ la\ derivata\ sinistra\ in\ x = 1\ esiste\ anche\ la\ derivata\ destra\ in\ x = -1$).

Abbiamo così dimostrato che $H(x)$ è una primitiva di $h(x)$ poiché $H'(x) = h(x)$ in tutto il dominio di h, $cioè\ in -1 \leq x \leq 1$).

L'area $\mathcal{A}$ della regione finita di piano delimitata da γ può essere calcolata applicando il Teorema fondamentale del calcolo integrale nel modo seguente:

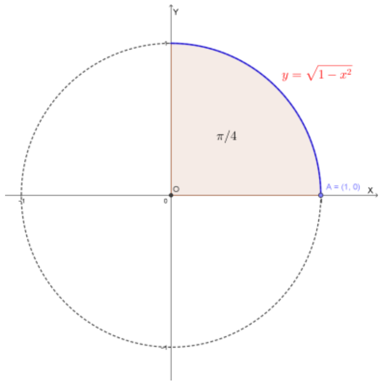
$$\mathcal{A} = 2\int_0^1 [g(x) - f_2(x)]\,dx = 2\int_0^1 \left[2\sqrt{1-x^2}\right] dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 h(x)\,dx = 4[H(x)]_0^1 =$$

$= 4[H(1) - H(0)] = 4\left[\frac{1}{2}\left(arcsen(x) + x\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1 = 2(arcsen(1) - 0) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi = \mathcal{A}$

Quindi l'area $\mathcal{A}$ della regione finita di piano delimitata da γ è uguale a π.

N.B.

Siccome $y = \sqrt{1-x^2}$ in $0 \leq x \leq 1$ è un quarto della circonferenza con centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio $R = 1$ $(x^2 + y^2 = 1)$ e tenendo conto del significato geometrico di integrale definito



si ha che:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}(\pi R^2) = \frac{1}{4}(\pi) = \frac{\pi}{4}$$

Quindi l'area richiesta $\mathcal{A}$ della regione finita di piano delimitata da γ si può calcolare senza ricorrere alla primitiva H di h nel modo seguente:

$$\mathcal{A} = 2\int_0^1 [g(x) - f_2(x)]\,dx = 2\int_0^1 \left[2\sqrt{1-x^2}\right]dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

Giuseppe Scoleri, con la collaborazione di Angela Santamaria