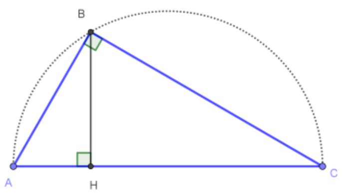
LICEO SCIENTIFICO 2024 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

È dato un triangolo ABC, rettangolo in B. Dimostrare che tale triangolo è isoscele se e solo se l'altezza BH relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.



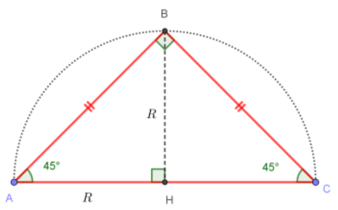
Il triangolo ABC è inscrittibile nella semicirconferenza di diametro AC e passante per B.

Prima parte

Hp: $BH \cong \frac{1}{2}AC$, Th: $AB \cong BC$

Dimostrazione

Se $BH \cong \frac{1}{2}AC$ allora $\overline{BH} = R$ (raggio della semicirconferenza). H è quindi il centro della semicirconferenza (vedi figura seguente), pertanto il triangolo ABH, rettangolo in H, è isoscele, come pure il triangolo CBH. Essendo i due triangoli ABH e CBH congruenti (triangoli rettangoli con cateti congruenti), segue che $AB \cong BC$.



Seconda parte

Hp: $AB \cong BC$, Th: $BH \cong \frac{1}{2}AC$

Dimostrazione

Se $AB \cong BC$ allora il triangolo ABC è isoscele sulla base AC, perciò è la metà del quadrato di diagonale AC e terzo vertice B. Poiché BH è perpendicolare ad AC, è altezza relativa alla base di un triangolo isoscele pertanto è anche mediana. H è quindi il punto medio della diagonale AC che è diametro della semicirconferenza, perciò BH è metà diagonale del quadrato suddetto, perciò $BH \cong \frac{1}{2}AC$.

QUESITO 2

Si lancia 5 volte una moneta truccata che dà testa con probabilità p.
- Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte?
- Per quale valore di p la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte è massima?

a)

Si tratta di un problema di prove ripetute (distribuzione binomiale), con probabilità di "un successo" uguale a p (uscita della testa), $n = 5 \;\; e \;\; k = 2$. La probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte nei cinque lanci è data da (ricordiamo che $q = 1 - p$):

$$p_{k,n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = p_{2,5} = \binom{5}{2} p^2(1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3$$

b)

Posto $y = 10p^2(1-p)^3$, si chiede il valore di p (con $0 \leq p \leq 1$) che rende massima y.
Notiamo che y è massima se lo è $z = p^2(1-p)^3$.

Metodo delle derivate

Risulta: $z' = 2p(1-p)^3 + p^2 \cdot 3(1-p)^2(-1) = (1-p)^2(2p - 2p^2 - 3p^2) = (1-p)^2(2p - 5p^2)$

$z' \geq 0 \;\; se \;\; p(1-p)^2(2-5p) \geq 0$. Ma $p \geq 0$ e $(1-p)^2 \geq 0$ quindi $z' \geq 0 \;\; se \;\; 2 - 5p \geq 0, \;\; p \leq \frac{2}{5}$
Essendo $0 \leq p \leq 1$ risulta $z' \geq 0$ per $0 \leq p \leq \frac{2}{5}$ e $z' \leq 0 \;\; per \;\; \frac{2}{5} \leq p \leq 1$.

La funzione z è quindi crescente per $0 \leq p \leq \frac{2}{5}$ e decrescente per $\frac{2}{5} \leq p \leq 1$, pertanto è massima per $p = \frac{2}{5}$.

il massimo valore che può assumere p per avere testa esattamente 2 volte nei 5 lanci è $p = \frac{2}{5}$.

Metodo elementare

Dobbiamo trovare il massimo di $p^2(1-p)^3$, che è il prodotto delle potenze di due quantità (p e 1-p) di somma costante: $p + (1-p) = 1$. Il massimo si ha quando le basi sono proporzionali agli esponenti:

$$\frac{p}{2} = \frac{1-p}{3}, \qquad 3p = 2 - 2p, \qquad 5p = 2, \qquad p = \frac{2}{5}$$

N.B.

Abbiamo usato la seguente proprietà:

se $x + y$ è $costante, allora\ il\ prodotto\ \ x^a y^b$ è $massimo\ se\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

QUESITO 3

Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, è dato il piano π : $3x-2y+5=0$.

- Determinare le coordinate del punto H, proiezione ortogonale di $P(4,2,1)$ sul piano π;
- Determinare l'intersezione della retta s: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ z-2=0 \end{cases}$ con il piano π.

La retta r passante per P=(4; 2; 1) e perpendicolare al piano π di equazione $3x-2y+5=0$ (con vettore della normale di componenti $(3,-2,0)$ ha equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x=4+3t \\ y=2-2t \\ z=1 \end{cases}$$

a)

Il punto H richiesto è l'intersezione di r col piano dato. Sostituendo le coordinate del generico punto di r nell'equazione del piano si ha:

$$3(4+3t)-2(2-2t)+5=0, \qquad 13t+13=0, \qquad t=-1$$

Sostituendo questo valore di t nelle equazioni della retta r otteniamo:

$$H: \begin{cases} x=4-3=1 \\ y=2+2=4 \\ z=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H=(1;4;1)$$

b)

Consideriamo la retta s di equazioni:

$$s: \begin{cases} x-y+1=0 \\ z-2=0 \end{cases}$$

L'intersezione di s col piano π si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ z-2=0 \\ 3x-2y+5=0 \end{cases} ; \begin{cases} x=y-1 \\ z=2 \\ 3y-3-2y+5=0 \end{cases} ; \begin{cases} x=y-1 \\ z=2 \\ y=-2 \end{cases} ; \begin{cases} x=-3 \\ z=2 \\ y=-2 \end{cases}$$

L'intersezione fra s e π è il punto di coordinate: $A=(-3;\ -2;2)$.

QUESITO 4

Dimostrare che l'equazione $x^3+x-\cos x=0$ ammette un'unica soluzione positiva.

Posto $y=x^3+x-\cos x$ abbiamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty}(x^3) = \pm\infty$$

(N.B. x^3 è infinito di ordine superiore rispetto ad x e $\cos x$ è $limitata\ fra\ -1\ e\ 1$)

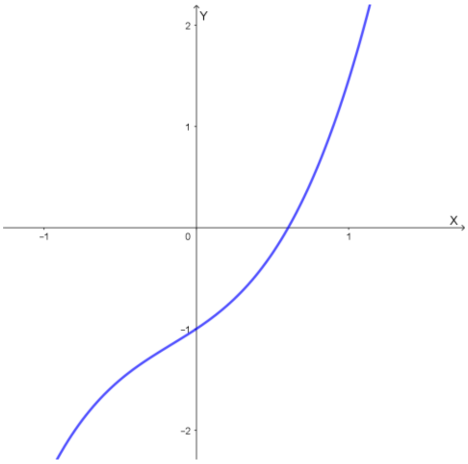
Risulta poi:

$y' = 3x^2 + 1 + sen\,x > 0$ per ogni x, poiché $3x^2 + 1 \geq 1$ e $-1 \leq sen\,x \leq 1$

(N.B. Quando $sen\,x = -1$ $si\ ha$ $3x^2 + 1 > 1$)

La funzione di equazione $y = x^3 + x - \cos x$ (continua su tutto l'asse reale) è quindi sempre crescente. Tenendo conto dei limiti calcolati all'inizio possiamo concludere che il suo grafico taglia l'asse delle x una ed una sola volta, in un punto di ascissa positiva (perché per $x = 0$ $si\ ha$ $y = -1$).

Grafico qualitativo:



Ciò equivale a dire che:

l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ ha una ed una sola soluzione (positiva).

QUESITO 5

Determinare la funzione polinomiale di quarto grado $y = p(x)$ sapendo che, in un sistema di riferimento cartesiano, il suo grafico verifica le seguenti condizioni:

- è tangente all'asse x nell'origine;
- passa per il punto $(1,0)$;
- ha un punto stazionario in $(2,-2)$.

La generica funzione polinomiale di quarto grado ha equazione del tipo:

$$y = p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Passaggio per (0; 0): $e = 0$
Passaggio per (1;0): $a + b + c + d + e = 0$
Passaggio per (2; -2): $16a + 8b + 4c + 2d + e = -2$
Tangenza all'asse x nell'origine: $y'(0) = 0$: $d = 0$
Punto stazionario (cioè a tangente orizzontale) (2; -2): $y'(2) = 0$: $32a + 12b + 4c + d = 0$

Avendo già trovato i valori di e e d (entrambi nulli), per trovare i coefficienti rimanenti dobbiamo risolvere il seguente sistema in a, b,c:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 16a+8b+4c=-2 \\ 32a+12b+4c=0 \end{cases} ; \begin{cases} a+b+c=0 \\ 8a+4b+2c=-1 \\ 8a+3b+c=0 \end{cases} ; \quad \begin{matrix} 2^a-3^a \\ 3^a-1^a \end{matrix} \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=-1 \\ 7a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \ c=-1-b \ ;$$

$$\begin{cases} a-1=0 \ \Rightarrow \ a=1 \\ c=-1-b \\ 7a+2b=0 \end{cases} ; \begin{cases} a=1 \\ c=-1-b \\ 7+2b=0 \ \Rightarrow \ b=-\dfrac{7}{2} \end{cases} ; \begin{cases} a=1 \\ c=-1+\dfrac{7}{2}=\dfrac{5}{2} \\ b=-\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Risulta quindi: $a=1,\ b=-\frac{7}{2}\ ,\ c=\frac{5}{2}\ ,\ d=0\ ,\ e=0$. La funzione polinomiale richiesta ha quindi equazione:

$$y=p(x)=x^4-\frac{7}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2$$

QUESITO 6

Si consideri la funzione integrale $F(x)=\int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt$, con $x \geq a$, in cui a indica un parametro reale positivo. Determinare il più grande valore di a in modo che $F\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\frac{1}{2}$.

$$F\left(\frac{2}{\pi}\right)=\int_a^{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt=-\int_a^{\frac{2}{\pi}} -\frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}\right)dt=-\left[sen\left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^{\frac{2}{\pi}}=-\left[sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{1}{a}\right)\right]=$$

$$=sen\left(\frac{1}{a}\right)-1=F\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\frac{1}{2}$$

Dobbiamo trovare il più grande valore di $a>0$ $\ (con\ x=\frac{2}{\pi}\geq a)$ in modo tale che sia: $sen\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{2}$.
Si hanno due casi:

1) $\frac{1}{a}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ **2)** $\frac{1}{a}=\frac{5}{6}\pi+2h\pi,\ \ con\ k\ e\ h\ interi\ relativi\ NON\ NEGATIVI, essendo\ \frac{1}{a}>0$

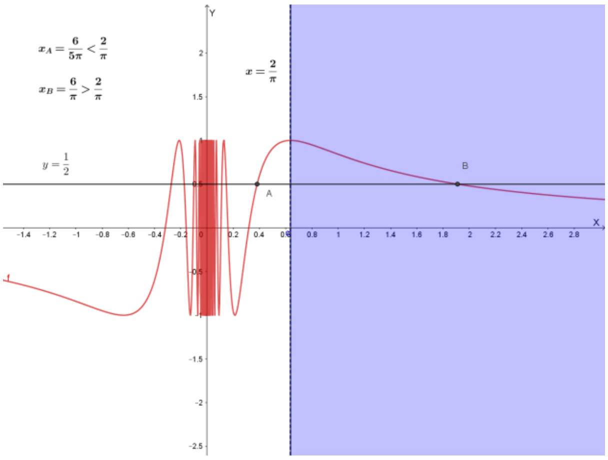
Osserviamo che il massimo valore di a (che è positivo) corrisponde al minimo valore di $\frac{1}{a}$.
Nel caso 1) il minimo valore di $\frac{1}{a}$ si ottiene con $k=0$ ed è $\frac{\pi}{6}$, nel caso 2) il minimo valore di $\frac{1}{a}$ si ottiene con h= 0 ed è $\frac{5}{6}\pi$.

Quindi:

caso1): massimo valore di $a=\frac{6}{\pi}>\frac{2}{\pi}\ ,\ quindi\ non\ accettabile$
caso 2): massimo valore di $a=\frac{6}{5\pi}<\frac{2}{\pi}$, valore accettabile.

Il massimo valore di a richiesto è quindi $a=\frac{6}{5\pi}$.

Anche se non richiesto, visualizziamo graficamente l'equazione $sen\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$, in cui viene evidenziato il massimo valore positivo della soluzione $x = a < \frac{2}{\pi}$ (l'ascissa de punto A):



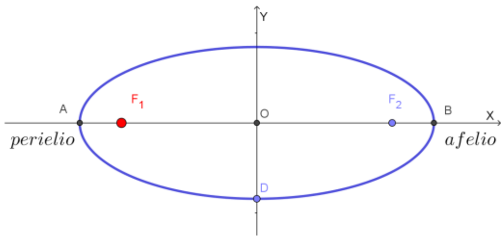
QUESITO 7

Il prossimo 5 luglio la terra raggiungerà l'afelio, il punto della propria orbita in cui è massima la distanza dal Sole, pari a circa $1{,}52 \cdot 10^{11}$ m. Il perielio è invece il punto che si trova alla minima distanza dal Sole, pari a circa $1{,}47 \cdot 10^{11}$ m. Determinare, in un opportuno sistema di riferimento, l'equazione che rappresenta la traiettoria della Terra intorno al Sole.

Sappiamo che l'orbita descritta dalla Terra è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei due fuochi, supponiamo F_1.

Fissiamo un sistema di riferimento con asse focale coincidente con l'asse delle x e punto medio della distanza fra i due fuochi coincidente con l'origine del sistema di riferimento.

L'afelio (massima distanza Terra-Sole) è in B ed il perielio (minima distanza Terra-Sole) è in A.



Indichiamo con a il semiasse maggiore dell'ellisse, con b il semiasse minore e con c la semidistanza focale (tutti espressi in metri).

Dai dati forniti segue che:

$$\overline{BF_1} = 1{,}52 \cdot 10^{11}\ m = a + c\ ,\ \ \overline{AF_1} = 1{,}47 \cdot 10^{11}\ m = a - c$$

Risulta quindi: $\overline{BF_1} + \overline{AF_1} = a + c + a - c = 2a \ \ \Rightarrow$

$$a = \frac{\overline{BF_1} + \overline{AF_1}}{2} = \frac{1{,}52 \cdot 10^{11} + 1{,}47 \cdot 10^{11}}{2} = 1{,}495 \cdot 10^{11}$$

Risulta poi: $c = \overline{BF_1} - a = 1{,}520 \cdot 10^{11} - 1{,}495 \cdot 10^{11} = 0{,}025 \cdot 10^{11}$

Ma sappiamo che $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \cdots \cong 1{,}4948 \cdot 10^{11}$.

Avremo: $a^2 \cong 2{,}235 \cdot 10^{22}$ e $b^2 \cong 2{,}234 \cdot 10^{22}$

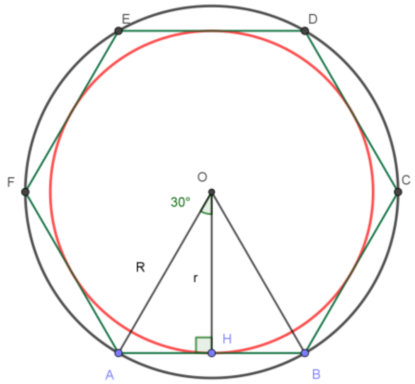
La traiettoria richiesta ha quindi equazione:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (dove a e b sono i valori calcolati sopra).

Notiamo che a e b differiscono di poco, a conferma che la traiettoria descritta dalla Terra nella sua rotazione intorno al Sole è pressoché circolare (piccola eccentricità).

QUESITO 8

Scrive Carlo Emilio Gadda in uno dei racconti de *L'Adalgisa – Disegni milanesi*: «Le stanze del servizio, il bagno, i corridoi, l'anticamera e l'uno de' due gabinetti, eran pavimentati con piastrelle rosse di piccolo formato: esagonali [...]. L'apotèma di quelle mattonelle misurava centimetri 5,196: mentreché il raggio del circolo circoscritto raggiungeva i 60 millimetri».
Esprimere la relazione esatta tra raggio del cerchio circoscritto ed apotema (ossia il raggio del cerchio inscritto) per un esagono regolare. Verificare il risultato ottenuto alla luce delle misure indicate dallo scrittore. Spiegare perché, utilizzando piastrelle esagonali regolari tutte congruenti, è possibile pavimentare un piano. Con quali altri poligoni regolari, tra loro congruenti, è possibile pavimentare un piano? Motivare la risposta.



$\overline{OH} = apotema = r\ (raggio\ cerchio\ inscritto)$

$\overline{OA} = \text{R}\ (raggio\ cerchio\ circoscritto)$

Ricordiamo che il triangolo AOB è equilatero con lato AB uguale ad R.

Essendo OH bisettrice dell'angolo al vertice O del triangolo equilatero AOB, risulta $A\hat{O}H = 30°$. Quindi:

$$r = R \cdot \cos 30° = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad da\ cui: \ \boldsymbol{\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Risulta quindi: $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}866030$

Con le misure indicate dallo scrittore si ha:

$$\frac{r}{R} = \frac{5{,}196\ cm}{60\ mm} = \frac{5{,}196\ cm}{6\ cm} = \frac{5{,}196}{6} = 0{,}8660$$

Il valore teorico è uguale a quello ottenuto con i dati dello scrittore fino alla quarta cifra decimale.

Con piastrelle esagonali regolari congruenti è possibile pavimentare un piano perché l'angolo al vertice di un esagono regolare misura 120°, quindi unendo tre piastrelle si ottiene l'angolo giro.

Gli altri poligoni regolari congruenti con cui si può pavimentare (**tassellare**) un piano sono: il triangolo equilatero ed il quadrato. Infatti per "riempire un angolo giro" si possono usare solo poligoni regolari il cui angolo al vertice sia un divisore di 360°, e questi sono solo 60° (triangolo equilatero: si affiancano 6 piastrelle), 90° (quadrato: si affiancano 4 piastrelle), 120° (esagono regolare: si affiancheranno 3 piastrelle).

Ricordiamo che la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è uguale ad $n-2$ angoli piatti.
Se il poligono è regolare, ogni suo angolo misurerà: $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.
Se $n = 3$: ogni angolo misurerà: $\frac{(3-2)\cdot 180°}{3} = 60°$
Se $n = 4$: ogni angolo misurerà: $\frac{(4-2)\cdot 180°}{4} = 90°$
(Se $n = 5$: ogni angolo misurerà: $\frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = 108°$, che non è un divisore di 360°).
Se $n = 6$: ogni angolo misurerà: $\frac{(6-2)\cdot 180°}{6} = 120°$

In nessun altro caso si ottiene un angolo che è un divisore di 360°. Infatti, dovendo essere l'angolo del poligono un divisore di 360°, deve essere: $360°: \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = intero\ positivo$, cioè:

$$\frac{360°}{\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}} = \frac{2n}{n-2} = h = intero\ positivo\ (con\ n \geq 3)$$

Eseguendo la divisione di $2n$ per $n-2$, si ottiene come quoziente 2 e come resto 4, pertanto:

$$2n = 2(n-2) + 4$$

Si ha dunque:

$$h = \frac{2n}{n-2} = \frac{2(n-2)+4}{n-2} = \frac{2(n-2)}{n-2} + \frac{4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

Affinché h sia intero positivo, $n-2$ (che è $\geq 1\ essendo\ n \geq 3$) deve essere un divisore (positivo) di 4.
Ma i divisori (positivi) di 4 sono solo: $1, 2, 4$.

Quindi si possono avere solo le seguenti possibilità:
$n-2 = 1$, $\quad n = 3$: $triangolo\ equilatero$
$n-2 = 2$, $\quad n = 4$: $quadrato$
$n-2 = 4$: $\quad n = 6$: $esagono\ regolare$

Per un approfondimento sul **Problema della Tassellatura** si veda il seguente link di Wikipedia

Giuseppe Scoleri, con la collaborazione di Angela Santamaria