ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato scelga a suo piacimento due dei seguenti problemi e li risolva.

1. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto x_0.

    a) Dire se la condizione $f'(x_0) = 0$ è:
        1. necessaria ma non sufficiente,
        2. sufficiente ma non necessaria,
        3. necessaria e sufficiente

    per concludere che la funzione ha un estremo relativo nel punto x_0. Fornire una esauriente dimostrazione della risposta.

    b) Posto: $f(x) = \frac{x^3}{ax+b}$, dove dove a, b sono parametri reali, determinare tali parametri in modo che la curva di equazione $y = f(x)$ un estremo relativo nel punto di coordinate $\left(\frac{3}{4}; \frac{27}{42}\right)$.

    c) Controllato che la curva γ cercata si ottiene per a = 2, studiare tale curva e disegnarne l'andamento in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

    d) Nello stesso piano Oxy disegnare l'andamento della curva γ' di equazione $y = f'(x)$, dopo aver determinato in particolare le coordinate dei punti comuni a γ e γ'.

    e) Sussiste un'evidente relazione fra l'andamento di γ e quello di γ'. Quale?

2. In un piano α sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza data r e una parabola p passante per gli estremi A, B di un diametro di k e avente come asse di simmetria l'asse del segmento AB. L'area del segmento parabolico delimitato dalla parabola p e dal segmento AB è

$$\frac{8}{3}r^2$$

    Dopo aver riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy:

    a) determinare l'equazione della circonferenza k;

    b) determinare l'equazione della parabola p;

    c) trovare le coordinate dei punti comuni a k e p;

d) calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k;

e) stabilire per quale valore di r la maggiore di tali aree è uguale a $\frac{32+22\pi-15\sqrt{3}}{3}\ cm^2$.

3. Considerato il quadrato ABCD, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo $T\hat{A}B$ misuri $2x$ radianti. Si conduca quindi per T la retta tangente alla circonferenza e si chiamino P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente.

    a) Esprimere in funzione di x il rapporto: $f(x)=\frac{\overline{CP}+\overline{CQ}}{\overline{AT}}$.

    b) Studiare la funzione f (x) ottenuta, tenendo conto dei limiti imposti alla variabile x dalla questione geometrica, e disegnare il grafico in un piano cartesiano ai fini della soluzione del punto c).

    c) Utilizzare il grafico disegnato per determinare x in modo che il rapporto considerato sia uguale ad un numero reale k assegnato.

    d) Verificare che il rapporto f (x) può essere scritto nella seguente forma:

$$f(x)=2\cdot\frac{\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x+\cos 2x+1}$$

    e) Stabilire che risulta: $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.