Sessione ordinaria - Indirizzo d'ordinamento 1999
Soluzione quesito 1

a)

La condizione è necessaria ma non sufficiente. Si tratta del cosiddetto **TEOREMA DI FERMAT**, secondo cui:

Se x_0 è un punto di massimo o minimo relativo per la funzione f(x) e in tale punto la funzione è derivabile risulta:

$$f'(x_0) = 0$$

Dimostrazione

Per definizione di derivata si può dire che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Supponiamo che $f'(x_0)$ non sia nulla e sia, per esempio, $f'(x_0) > 0$.

In base al **teorema della permanenza del segno** esiste un intorno I di x_0 in cui risulta

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Ma allora in I risulta che:

- Se $x>x_0 \Rightarrow f(x)>f(x_0)$
- Se $x<x_0 \Rightarrow f(x)<f(x_0)$

e quindi x_0 non può essere punto di massimo né di minimo.

In modo del tutto analogo si ragiona nel caso in cui sia $f'(x_0) < 0$.

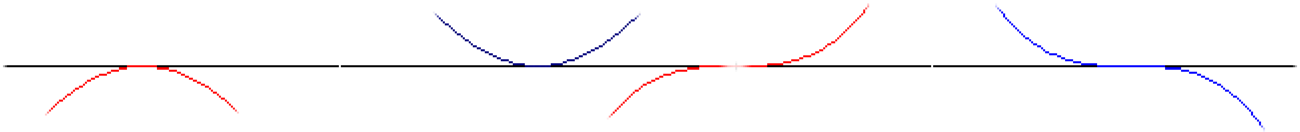
N.B. Un'altra dimostrazione è quella che viene di solito presentata sui libri di testo nell'ambito della dimostrazione del teorema di Rolle.

Osservazioni

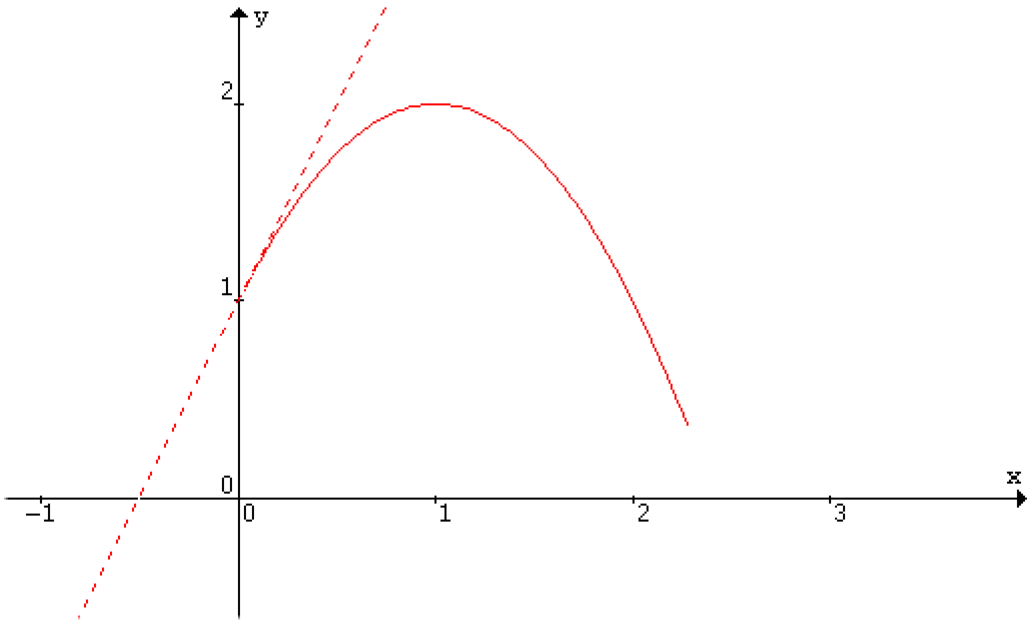
1. Per verificare che la condizione non è sufficiente si consideri ad esempio la funzione di equazione

   $y = x^3$.

2. I punti a derivata nulla sono detti *punti stazionari*:



3. Il punto x_0 di cui si parla nel teorema (e nel quesito) deve essere INTERNO all'insieme di definizione, altrimenti il teorema non vale; in un estremante relativo di frontiera infatti la derivata non è necessario che si annulli:



Nel punto (0;1) c'è chiaramente un minimo relativo senza che la derivata si annulli.

b)

$$f(x) = \frac{x^3}{ax + b}$$

Si calcola la derivata:

$$f'(x) = \frac{2ax^3 + 3bx^2}{(ax + b)^2}$$

Per determinare i valori di **a** e **b** si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{32} \\ f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

che conduce al sistema:

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 3a + 4b = 2 \end{cases}$$

la cui soluzione è **a = 2** e **b = -1.** La funzione richiesta ha quindi equazione:

$$f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$$

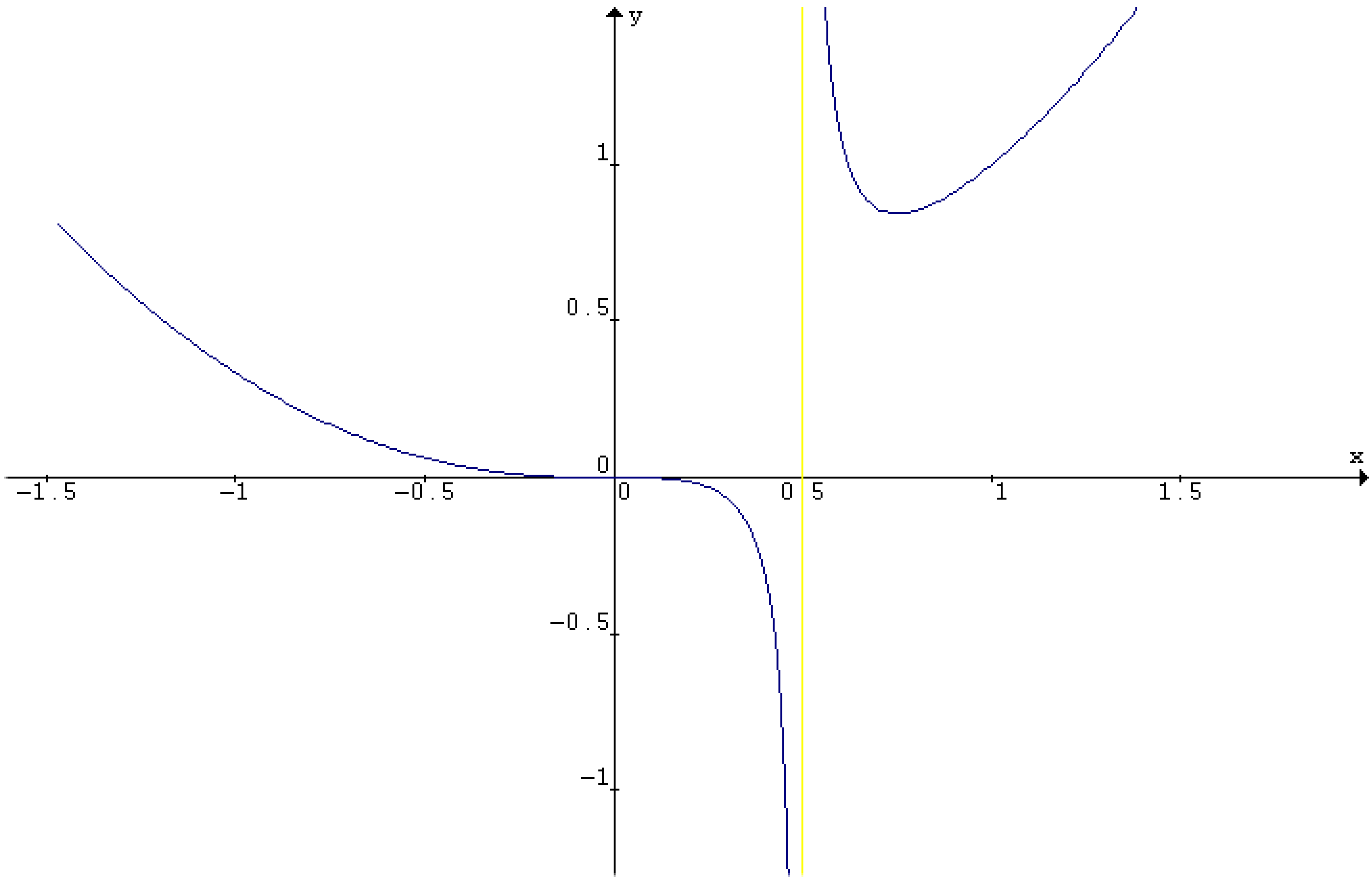
c)

$$y = \frac{x^3}{2x-1}$$

- La funzione è definita per ogni $x \neq 1/2$
- Il limite all'infinito è sempre + infinito; non c'è asintoto obliquo, essendo la funzione un infinito del secondo ordine sia al +infinito che al -infinito:

  $y \sim (1/2)\, x^2$
- $x = 1/2$ è asintoto verticale
- $y' = \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}$; dallo studio della derivata si scopre che il punto (0;0) è un flesso a tangente orizzontale e, come già noto, che

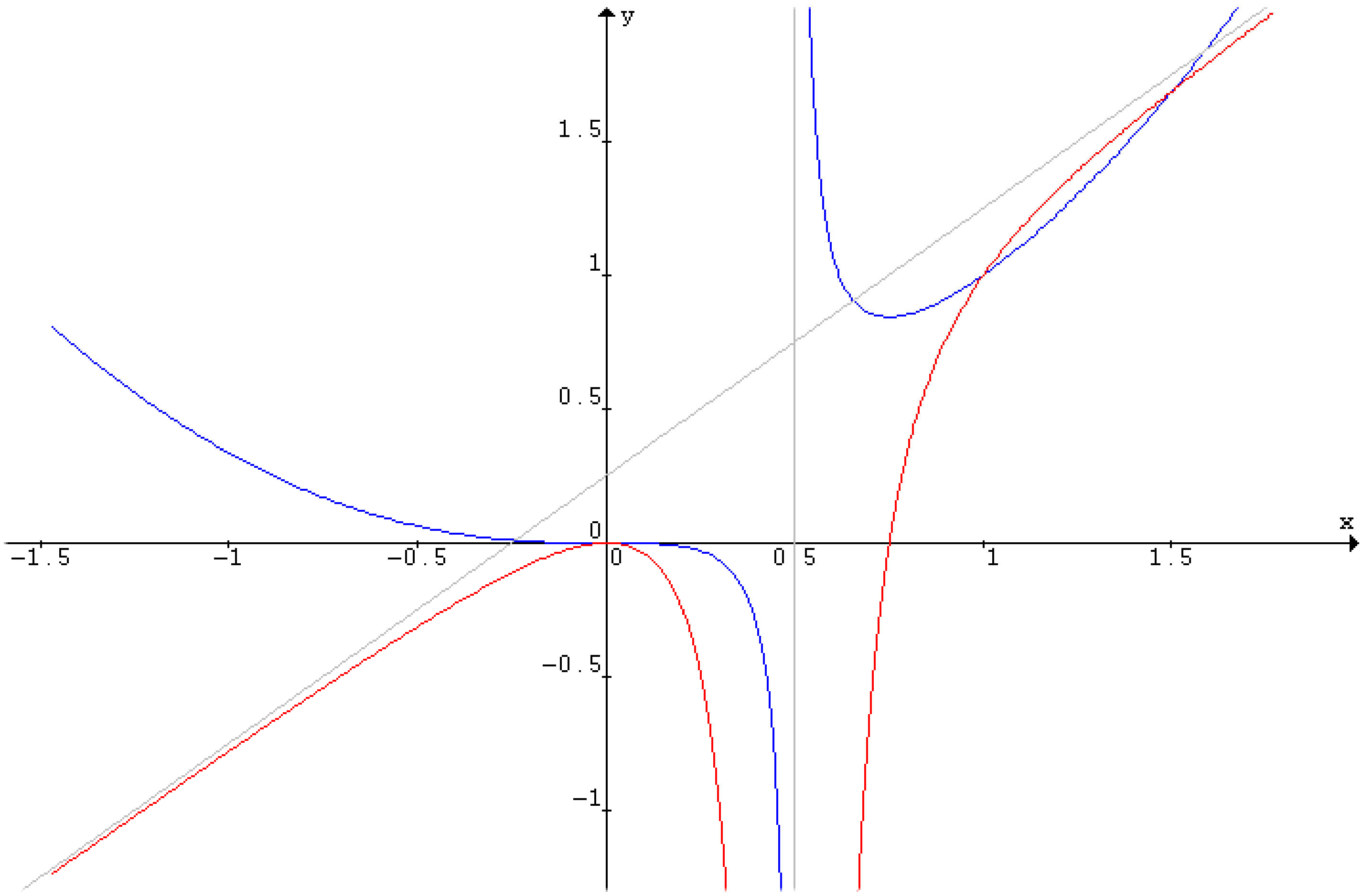
  $\left(\frac{3}{4}, \frac{27}{32}\right)$ è un minimo relativo.
- $y'' = \frac{2x(4x^2 - 6x + 3)}{(2x-1)^3}$; dallo studio della derivata seconda si ritrova il flesso (0;0) e si scopre che la concavità del grafico è verso l'alto per x<0 e per x>1/2, verso il basso per 0<x<1/2. Il grafico della funzione è quindi il seguente:



d)

Il grafico della funzione di equazione y = f ' (x) può essere ricavato da quello già trovato tenendo presente che:

1. l'insieme di definizione della f ' è lo stesso di quello della f (dato che quest'ultima non ha punti di non derivabilità);
2. dove la f cresce la f ' è positiva, dove la f decresce la f ' è negativa;
3. i punti di stazionari di f sono zeri per la f ';
4. dove la concavità di f è verso l'alto la f ' è crescente, dove la concavità di f è verso il basso la f ' è decrescente;
5. dove la f ha un flesso la f ' ha un estremo;
6. la f ' ha anche un asintoto obliquo (sia al + che al - infinito), essendo una funzione razionale fratta il cui grado del numeratore supera di uno il grado del denominatore: la sua equazione è: **y = x + 1/4**.
7. Il grafico della derivata (in rosso) insieme al grafico della funzione di partenza (in in blu) è il seguente:



I due grafici si intersecano nei punti di coordinate **(0;0), (1;1) e (3/2; 27/16).**

e)

La relazione tra i due grafici è quella dettagliata nel punto precedente.