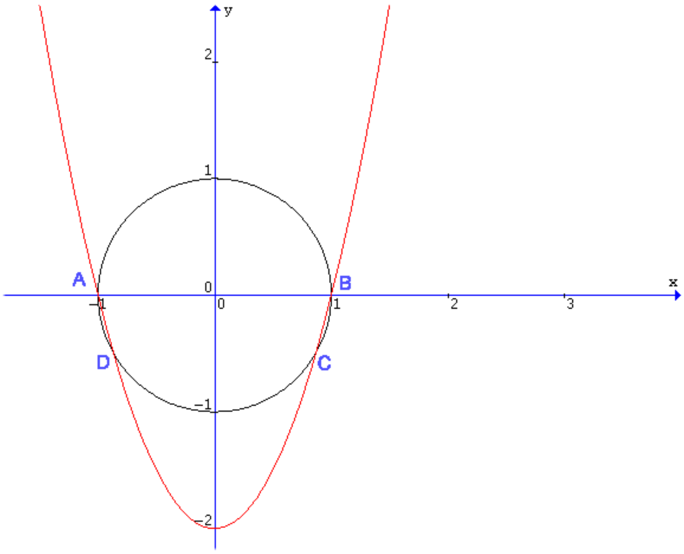
Sessione ordinaria - Indirizzo d'ordinamento 1999
Soluzione quesito 2

a)

Per comodità grafica si è posta l'unità di misura uguale al raggio R della circonferenza.



Rispetto al sistema fissato la circonferenza **k** ha equazione

$\mathbf{x^2 + y^2 = R^2}$

b)

Indicato con V il vertice della parabola **p**, in base al **Teorema di Archimede** deve essere:

$$\frac{2}{3}\overline{AB}\cdot\overline{OV} = \frac{8}{3}R^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}\cdot(2R)\cdot(\overline{OV}) = \frac{8}{3}R^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{OV} = 2R$$

La parabola passa per A, B e per il punto V = (0;-2R). La generica parabola per A e B ha equazione del tipo:

$\mathbf{y = a\,(x - R)\,(x + R) = a\,(x^2 - R^2)}$

ed imponendo il passaggio per V si ottiene **a = 2/R;** la parabola ha quindi equazione:

$$y = \frac{2}{R}\,(x^2 - R^2)$$

c)

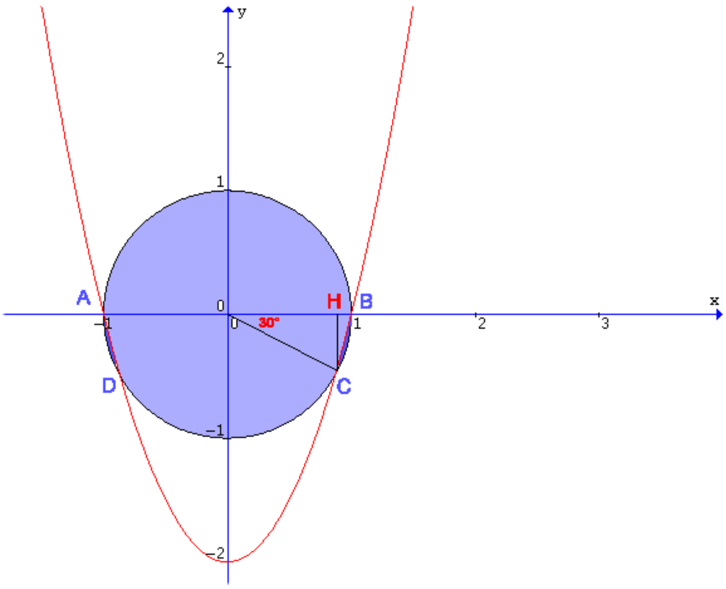
Per trovare i punti comuni alla circonferenza e alla parabola si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = \frac{2}{R}(x^2 - R^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - R^2 = -y^2 \\ y = \frac{2}{R}(-y^2) \end{cases} \Rightarrow \quad y = -\frac{R}{2} \quad \begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}R \\ y = -\frac{R}{2} \end{cases}$$

I punti comuni alle due curve sono quindi:

$$A = (-R;0), \quad B = (R;0), \quad C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R; -\frac{R}{2}\right), \quad D = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R; -\frac{R}{2}\right)$$

d)



La parabola divide il cerchio in tre regioni, due delle quali hanno ugual area.

Calcoliamo l'area della regione del quarto quadrante delimitata dagli archi BC di parabola e di circonferenza; indicata con S tale area, si ha:

S = area settore circolare OBC- area triangolo OHC- area triangolo mistilineo HBC individuato dalla parabola.

Essendo la misura del cateto HC metà del raggio OC si ha che l'angolo in O del triangolo OHC misura 30°. Si ha pertanto:

area settore circolare = area cerchio/12= $\frac{\pi R^2}{12}$

- area triangolo OHC = $\frac{\sqrt{3}}{8}R^2$
- area triangolo mistilineo HCB =

$$-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}R}^{R} \frac{2}{R}(x^2 - R^2)dx = \dots = \frac{R^2(16 - 9\sqrt{3})}{12}$$

L'area S richiesta vale quindi:

$$S = \frac{R^2(2\pi - 32 + 15\sqrt{3})}{24}$$

Questo è anche il valore dell'area della regione del terzo quadrante delimitata dalle due curve.

La terza regione si ottiene sottraendo all'area del cerchio 2S; si ha quindi:

$$\pi R^2 - 2 \cdot S = \pi R^2 - \frac{R^2(2\pi - 32 + 15\sqrt{3})}{12} = \frac{R^2(10\pi + 32 - 15\sqrt{3})}{12}$$

e)

Deve essere:

$$\frac{R^2(10\pi + 32 - 15\sqrt{3})}{12} = \frac{32 + 22\pi - 15\sqrt{3})}{3} \quad \Rightarrow \quad R = 2\sqrt{\frac{32 + 22\pi - 15\sqrt{3}}{10\pi + 32 - 15\sqrt{3}}}\ cm$$

N.B.

Quasi certamente l'estensore del quesito voleva indicare il valore

$$\frac{32 + 10\pi - 15\sqrt{3})}{3}$$

che portava al semplice valore R=2.