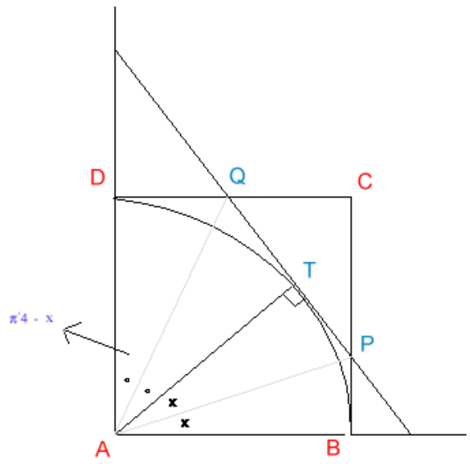
# Sessione ordinaria - Indirizzo d'ordinamento 1999
# Soluzione quesito 3

**a)**




$$0 \le 2x \le \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$$

Poniamo AB = R. L'angolo BAT misura 2x quindi, essendo PT e PB tangenti alla circonferenza, l'angolo BAP misura x; si ha perciò:

$$\overline{PB} = R\,tg\,x \quad \Rightarrow \quad \overline{PC} = R - R\,tg\,x$$

Essendo poi l'angolo DAT di misura

$$\frac{\pi}{2} - 2x$$

e QD e QT tangenti alla circonferenza, gli angoli DAQ e QAT sono uguali ed hanno misura

$$\frac{\pi}{4} - x$$

Pertanto:

$$\overline{DQ} = R\,tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \qquad \Rightarrow \quad \overline{CQ} = R - R\,tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

La funzione richiesta è allora:

$$f(x) = \frac{\overline{CP} + \overline{CQ}}{\overline{AT}} = \frac{R - Rtgx + R - Rtg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{R} = 2 - tg\,x - tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \quad \ldots \quad = \frac{1 + 2tgx - tg^2 x}{1 + tg\,x}$$

**b)**

Studiamo la funzione di equazione

$$y = \frac{1 + 2tgx - tg^2 x}{1 + tg\ x}$$ con la limitazione $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

- La funzione è sempre definita e continua nell'intervallo di studio.
- Agli estremi vale 1.
- Non si annulla mai nell'intervallo di studio, dove è sempre positiva.
- La sua derivata prima è:
  $$y' = -\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4} - x)} = \frac{\cos 2x - \text{sen } 2x}{\cos^2 x(1 + \text{sen } 2x)}$$

  che, nell'intervallo di studio, si annulla per $x = \frac{\pi}{8}$

  La derivata prima risulta positiva quando: $cos\ 2x - sen\ 2x > 0$

  ovvero per $0 < x < \frac{\pi}{8}$

  Quindi la funzione è crescente nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{8}$ e decrescente nell'intervallo $\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4}$

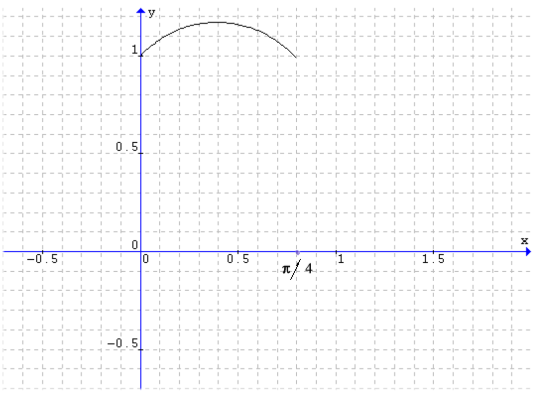
  Si ha quindi un massimo per $x = \frac{\pi}{8}$ che vale

  $4 - 2\sqrt{2}$ .

  Risulta poi:

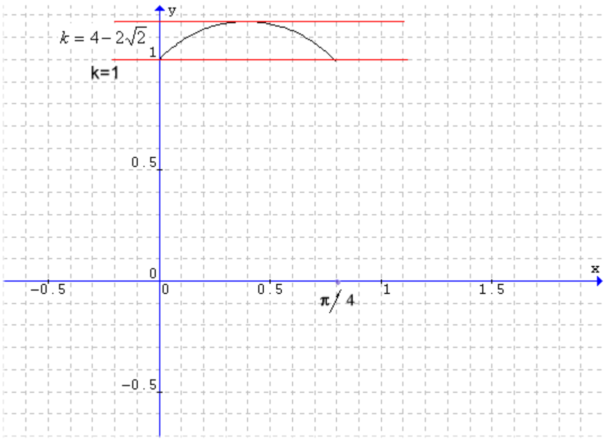
  $y'(0) = 1$ e $y'(\frac{\pi}{4}) = -1$

  Lo studio della derivata seconda, molto laborioso, non aggiunge particolari rilevanti al grafico:



**c)**

Ponendo f(x) = k, consideriamo il grafico seguente:




da cui emerge facilmente che **si hanno sempre due soluzioni** per

$$1 \leq k \leq 4 - 2\sqrt{2}$$

**d)**

La forma richiesta di f(x) si ottiene facilmente trasformando prima la tangente in seno e coseno e poi applicando le formule di duplicazione e bisezione del seno e del coseno.

**e)**

Stabiliamo che

$$tg\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

Risulta:

$$tg\frac{\pi}{8} = tg\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

ed essendo:

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\text{sen}\,x}$$

si ha:

$$tg\,\frac{\pi}{8} = tg\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \quad \ldots \quad = \sqrt{2}-1$$