

Scuole Italiane all'Estero
ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione 2001

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

PROBLEMA 1

E' assegnato un cilindro equilatero Q il cui raggio di base misura a .

- a) Si determini il cono C di volume minimo circoscritto al cilindro (C e Q hanno basi complanari);
- b) Si determini il valore di a per il quale il volume di C, approssimato alla prima cifra decimale, è $31,4 \text{ dm}^3$;
- c) Si determini il volume della sfera S circoscritta a C.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito ad un sistema di riferimento ortogonale monometrico è data la curva Γ di equazione:

$$y = 2x - \frac{x^3}{2}$$

- a) Si studi e si rappresenti Γ ;
- b) considerata la retta r di coefficiente angolare m passante per il punto $A(2, 0)$, si determini, al variare di m , il numero delle intersezioni di r con Γ ;
- c) si calcoli l'area della regione finita di piano R, del primo quadrante, delimitata da Γ e dall'asse x ;
- d) si determini il volume del solido generato da R in un giro completo intorno all'asse x .

QUESTIONARIO

1. Enunciare il teorema di *de L'Hôpital* e applicarlo per dimostrare che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{2^x} = 0$$

2. Mostrare, eventualmente anche con esempi, che la derivata del prodotto di due o più funzioni **non è** il prodotto delle derivate.

3. Dimostrare che se un polinomio $p(x)$ è divisibile per $(x-a)^m$ allora $p'(x)$ è divisibile per $(x-a)^{m-1}$.

4. Calcolare la derivata della funzione:

$$\arcsen \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \text{arctg}x$$

Dal risultato quali conseguenze se ne possono trarre per la $f(x)$? E' una costante?

5. Si ricavi la formula che dà il numero delle combinazioni semplici di n elementi a k a k .

6. Verificare che:

$$\int_e^{e^2} x \log x dx = \frac{e^2}{4}(3e^2 - 1)$$

7. Siano a e b due numeri positivi diversi da 1. Dimostrare che:

$$\log_a b \times \log_b a = 1$$

8. La somma di due numeri non negativi è 16. Quale è il valore più basso che assume la somma dei loro quadrati? Quale il valore più alto?

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a quattro domande scelte all'interno del questionario.

Durata massima della prova : 6 ore

E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.