ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Tema di MATEMATICA - **a.s. 2000/2001**

Testo valevole per i CORSI SPERIMENTALI (3ª tipologia)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve C_m di equazione:

$$y = f_m(x) \ ,$$

dove:

$$f_m(x) = \frac{x + m}{|x + m| - m}$$

ed m è un parametro reale non nullo.

a) Trovare l'insieme di definizione e l'insieme di derivabilità di f_m .

b) Dimostrare che ogni curva C_m ha un centro di simmetria.

c) Studiare e disegnare la curva C_2 corrispondente ad m=2.

d) Determinare l'equazione della retta t tangente a C_2 nel punto di ascissa –1 e l'ascissa dell'ulteriore punto comune alla retta t e alla curva C_2.

e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_2 e dalla retta t.

PROBLEMA 2.

È dato il rettangolo ABCD i cui lati AB e AD sono lunghi rispettivamente 2*a* *a*, essendo *a* una lunghezza nota. Indicare con E il punto simmetrico di A rispetto alla retta BD e con F il punto in cui si secano le rette EB e DC.

a) Dimostrare, con considerazioni di geometria sintetica, che i punti A, B, C, E, D appartengono ad una stessa circonferenza k.

b) Stabilire che la lunghezza del segmento DF è $\frac{5}{4}a$.

c) Calcolare l'area del pentagono ABCED.

d) Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della circonferenza k e le coordinate dei punti A ed E.

e) Calcolare, infine, le aree delle due regioni piane in cui la retta EC divide il cerchio delimitato da k.

QUESTIONARIO.

1. Considerate le funzioni reali di variabile reale f(x) e g(x), dire se la seguente proposizione è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta: «Condizione necessaria e sufficiente affinché risulti $f'(x) = g'(x)$ è che sia $f(x) = g(x)$».

2. Il limite della funzione $\dfrac{x^2 - \operatorname{sen} x}{x^2 - \cos x}$, quando x tende a + infinito:

A) è uguale a 0;
B) è uguale a 1;
C) è uguale a + infinito;
D) non esiste.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché f(x) sia continua nel punto a è che risulti derivabile in a.

4. Una primitiva della funzione f(x) è sen 2x. Se è possibile, calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{x}{3}\right) dx$. Altrimenti spiegare perché il calcolo non è possibile..

5. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti rappresentati dalla seguente equazione:

$$x^2 + y^2 - 4xy = 0 .$$

Tale luogo è costituito da:

A) un punto;
B) due punti;
C) una retta;
D) due rette;
E) una figura diversa dalle precedenti.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

6. Di un'affinità si sa soltanto che due rette corrispondenti, comunque scelte, sono parallele. Considerate le due seguenti proposizioni:

A: «è escluso che l'affinità sia una rotazione»,
B: «l'affinità può essere una similitudine»,

dire di ciascuna se è vera o falsa e fornire esaurienti spiegazioni delle risposte.

7. Considerata l'affinità di equazioni:

$$X = 2x + 3y , \quad Y = -3x + 2y ,$$

determinare, se ve ne sono, le sue rette unite.

8. Posto che ln x indichi il logaritmo di x in base *e*, risulta
$\sqrt{\ln^2 x + 2\ln x + 1} = \ln x + 1$ per tutti e soli gli x reali tali che:

A) $x \geq 0$; B) $x \geq 1$; C) $x \geq e$; D) $x \geq \frac{1}{e}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

9. Si consideri la successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1 \\ a_{n-1} + 2n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Calcolare a_{70} e descrivere un algoritmo che generi i primi 70 numeri della successione e li comunichi sotto forma di matrice di 7 righe e 10 colonne.

10. Considerata l'equazione in x:

$$x^3 + x - 3 = 0 \,,$$

spiegare perché ammette una soluzione reale ed una soltanto e scrivere un algoritmo che permetta di calcolarne un valore approssimato a meno di 1/100.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.