ORDINAMENTO 2001 - SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Si consideri la funzione reale f_m di variabile reale x tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m}$$

dove m è un parametro reale non nullo.

a)

Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione.

Insieme di definizione:

$|x-2m|+m \neq 0\,,\quad |x-2m| \neq -m : sempre\ verificato\ se\ m>0\,;$

$se\ m<0\!: \quad x-2m \neq \pm m \quad , \quad da\ cui\!:$

$x-2m \neq m\,,\quad x \neq 3m$ (m negativo)

$x-2m \neq -m\,,\quad x \neq m$ (m negativo)

Quindi l'insieme di definizione è il seguente:

Se m>0: tutto R
Se m<0: $x \neq 3m \quad e \quad x \neq m$

Insieme di continuità:

Trattandosi una funzione razionale fratta l'insieme di continuità coincide con l'insieme di definizione. Quindi:

Se m>0: la funzione è continua su tutto R
Se m<0: la funzione è continua per ogni x diverso da m e da 3m (in cui ci sono delle discontinuità di seconda specie, essendo i limiti infiniti)

Insieme di derivabilità:

Riscriviamo la funzione nella seguente forma:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-2m+m}=\dfrac{x^2}{x-m} & se \quad x\geq 2m \quad e \quad x\neq m\\ \dfrac{x^2}{-x+2m+m}=\dfrac{x^2}{-x+3m} & se \quad x<2m \quad e \quad x\neq 3m\end{cases}$$

Se $x\neq 2m$ (con $x\neq m$ e $x\neq 3m$ $quando\ m<0$) la funzione è sempre derivabile.
Se $x=2m$ calcoliamo la derivata destra e sinistra:

Se x>2m, $f(x)=\frac{x^2}{x-m}$, quindi $f'(x)=\frac{2x(x-m)-x^2}{(x-m)^2}=\frac{x^2-2mx}{(x-m)^2}\to 0 \quad se \quad x\to(2m)^+$

Se x<2m, $f(x)=\frac{x^2}{-x+3m}$, quindi $f'(x)=\frac{2x(-x+3m)+x^2}{(-x+3m)^2}=\frac{-x^2+6mx}{(-x+3m)^2}\to 8 \quad se \quad x\to(2m)^-$

Quindi la funzione non è derivabile se x=2m. Riepilogando:

Se m>0: la funzione è derivabile per ogni $x\neq 2m$.
Se m<0: la funzione è derivabile per ogni $x\neq m,2m,3m$.

b)

Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f_1(x)$ corrispondente ad $m=1$, studiarla e disegnarla in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.

Per m=1 la funzione ha equazione:

$$y=f(x)=\frac{x^2}{|x-2|+1}=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-1} & se\ x\geq 2\\ \dfrac{x^2}{-x+3} & se\ x<2\end{cases}$$

La funzione è definita su tutto R.

Simmetrie notevoli: la funzione non è pari né dispari

Intersezioni con gli assi:
Se x=0, $y=\frac{x^2}{-x+3}=0$
Se y=0, x=0

Segno della funzione:
il numeratore non è mai negativo (si annulla solo per x=0), il denominatore è sempre positivo, quindi la funzione non è mai negativa e si annulla solo per x=0.

Limiti:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x+3} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$

Asintoti obliqui:

Per $x \to -\infty$ risulta $f(x) = \frac{x^2}{-x+3} \sim -x$; quindi m=-1.

$$q = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2}{-x+3} + x\right] = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x}{-x+3}\right) = -3$$

Quindi per $x \to -\infty$ abbiamo l'asintoto: $y = -x - 3$

Per $x \to +\infty$ risulta $f(x) = \frac{x^2}{x-1} \sim x$; quindi m=1

$$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$$

Quindi per $x \to +\infty$ abbiamo l'asintoto: $y = x + 1$

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{(\mathrm{x}-1)^2} & se\ \ x > 2 \\ \dfrac{-x^2 + 6x}{(x-3)^2} & se\ \ x < 2 \end{cases}$$

Se $x \to 2^-$ $f'(x) \to 0$
Se $x \to 2^+$ $f'(x) \to 8$

Quindi in A=(2;4) abbiamo un punto angoloso (la semi tangente destra ha m=8, la sinistra m=0).

Studiamo il segno della derivata prima.
Se $x > 2$ $f'(x) \geq 0$ se $\frac{x^2-2x}{(\mathrm{x}-1)^2} \geq 0$ $\Longrightarrow$ $x^2 - x \geq 0$: $x \leq 0\ vel\ \ x \geq 1$
Quindi se $x > 2$ la funzione è sempre crescente.

Se $x < 2$ $f'(x) \geq 0$ se $\frac{-x^2+6x}{(x-3)^2} \geq 0$ $\Longrightarrow$ $-x^2 + 6x \geq 0$, $x^2 - 6x \leq 0,$ $0 \leq x \leq 6$

Quindi se $x < 2$ la funzione è crescente per $0 < x < 2$ e decrescente per $x < 0$; quindi x=0 è punto di minimo relativo (e assoluto).

Derivata seconda:

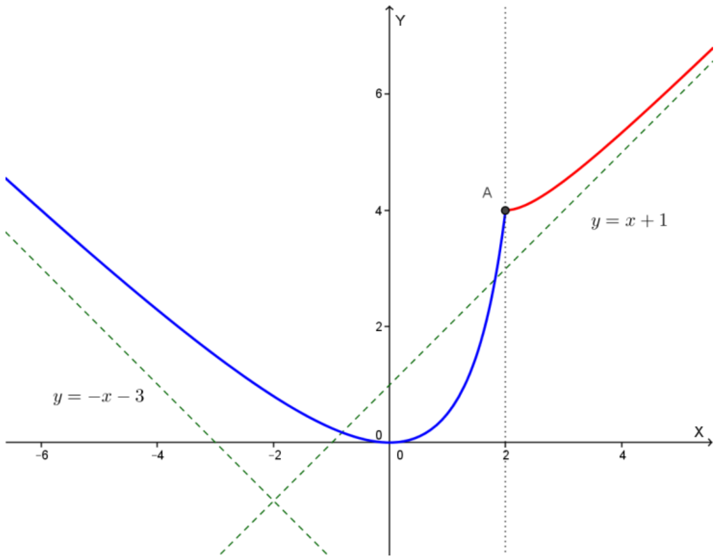
$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^3} & se\ \ x > 2 \\ -\dfrac{18}{(x-3)^3} & se\ \ x < 2 \end{cases}$$

Studiamo il segno della derivata seconda.

Se $x > 2$ $\quad f''(x) \geq 0 \quad$ se $\quad \frac{2}{(x-1)^3} \geq 0 \quad : \quad sempre\ se\ \ x > 2$: la concavità è sempre rivolta verso l'alto se x>2.

Se $x < 2$ $\quad f''(x) \geq 0 \quad$ se $\frac{-18}{(x-3)^3} \geq 0$, $\; x - 3 < 0$ (denominatore sempre <0), quindi $x < 3:$ $\; sempre\ se\ \ x < 2$: la concavità è sempre rivolta verso l'alto se x<2.

Il grafico della funzione è il seguente:

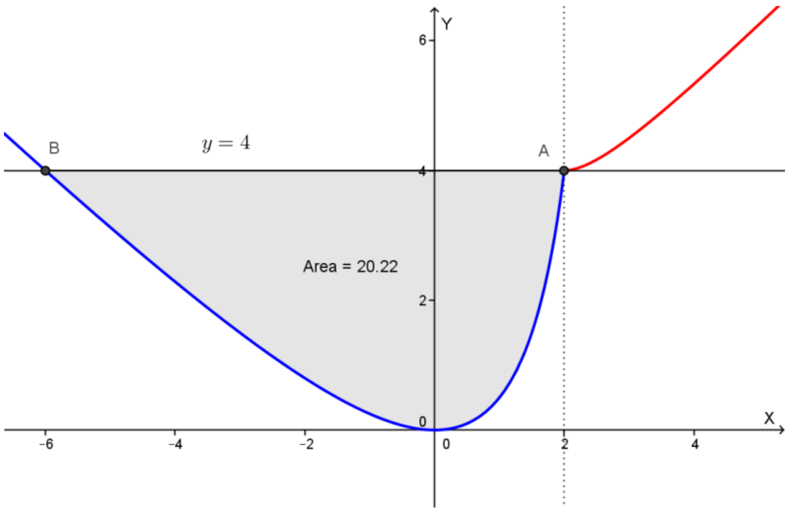


c)

Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A.

La retta parallela all'asse x condotta da A ha equazione y=4.

La regione richiesta è indicata nella figura seguente:



Cerchiamo l'ascissa del punto B:

$\frac{x^2}{-x+3} = 4$, $x^2 + 4x - 12 = 0$, $x = 2$ e $x = -6$: quindi B ha ascissa – 6.

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\int_{-6}^{2} \left(4 - \frac{x^2}{-x+3}\right) dx = \int_{-6}^{2} \left(\frac{x^2 + 4x - 12}{x - 3}\right) dx$$

Effettuando la divisione tra il numeratore ed il denominatore otteniamo:

$x^2 + 4x - 12 = (x - 3)(x + 7) + 9$, quindi:

$$\int_{-6}^{2} \left(\frac{x^2 + 4x - 12}{x - 3}\right) dx = \int_{-6}^{2} \left(\frac{(x - 3)(x + 7) + 9}{x - 3}\right) dx = \int_{-6}^{2} \left(x + 7 + \frac{9}{x - 3}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 7x + 9ln|x - 3|\right]_{-6}^{2} = 2 + 14 - (18 - 42 + 9ln9) = (40 - 9ln9)\ u^2 \cong 20.22\ u^2$$

L'area richiesta vale $(40 - 9ln9)\ u^2 \cong 20.22\ u^2$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria