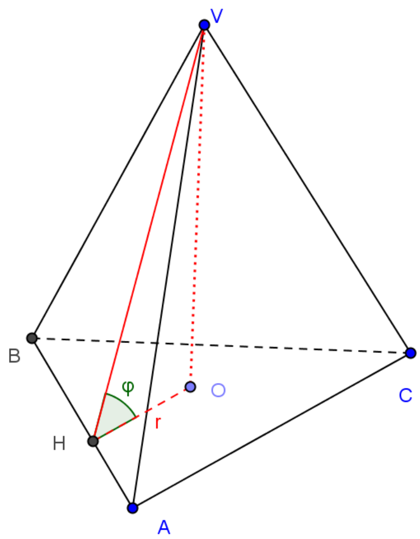
ORDINAMENTO 2001 - SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è $24a^2$, dove a è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5}$ e che il piano della faccia VAB della piramide forma con il piano della base ABC un angolo φ tale che $sen\,\varphi=\frac{12}{13}$.



a)

Calcolare l'altezza della piramide.

Posto BC=x, risulta:

$$AB=\frac{3}{5}x\ ,\qquad AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{x^2-\frac{9}{25}x^2}=\frac{4}{5}x$$

L'area del triangolo rettangolo ABC di cateti AB e C è:

$$A(ABC)=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}x\right)\left(\frac{4}{5}x\right)=\frac{6}{25}x^2=24a^2\quad\Rightarrow\quad x^2=100a^2,\quad x=10a$$

I lati di ABC misurano quindi:

$AB = 6a\,,\qquad AC = 8a\;,\qquad BC = 10a$

Indichiamo con r la distanza OH del piede O dell'altezza della piramide dal cateto AB e, osservato che O è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo ABC (per definizione di piramide retta), r è il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo ABC.
Ricordiamo che, detto p il semiperimetro di un poligono circoscritto ad una circonferenza di raggio r ed A l'area del poligono stesso, risulta:

$$A = p \cdot r\;,\qquad da\ cui\ \ r = \frac{A}{p} = \frac{24a^2}{12\,a} = 2a$$

Considerando il triangolo VOH, rettangolo in O, essendo VHO una sezione normale del diedro formato dalle facce VAB ed ABC, si ha:

$$VO = OH \cdot tg\varphi = r \cdot tg\varphi = 2a \cdot tg\varphi$$

Dobbiamo determinare $tg\varphi$ sapendo che $sen\,\varphi = \frac{12}{13}$.
Notato che l'angolo φ è acuto, otteniamo:

$$tg\varphi = \frac{sen\,\varphi}{cos\,\varphi} = \frac{sen\,\varphi}{\sqrt{1 - sen^2\varphi}} = \frac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1 - \frac{144}{169}}} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

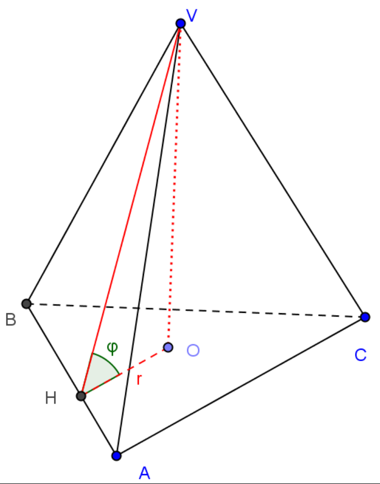
Pertanto:

$$VO = 2a \cdot tg\varphi = 2a \cdot \frac{12}{5} = \frac{24}{5}a$$

L'altezza della piramide è $VO = \frac{24}{5}a$

b)

Controllato che essa è $\frac{24}{5}a$, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.



La distanza di C dal piano della faccia VAB non è altro che l'altezza della piramide relativa alla base ABV. Calcolando il volume della piramide e l'area della base ABV riusciremmo a calcolare l'altezza della piramide relativa alla base ABV.

$$V = \frac{1}{3}Area(ABC) \cdot VO = \frac{1}{3} \cdot 24a^2 \cdot \frac{24}{5}a = \frac{192}{5}a^3$$

Per trovare l'area d ABV cerchiamo VH:

$$VH = r / \cos\varphi = \frac{2a}{5/13} = \frac{26}{5}a$$

Pertanto:

$$Area(ABV) = \frac{AB \cdot VH}{2} = \frac{1}{2}(6a)\left(\frac{26}{5}a\right) = \frac{78}{5}a^2$$

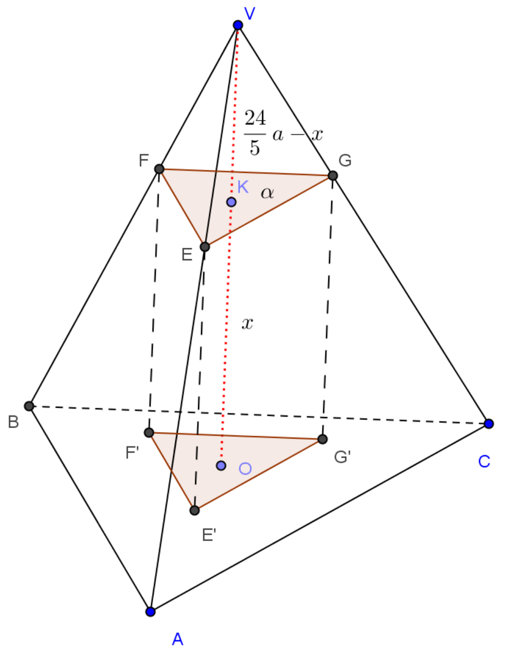
La distanza h di C dalla faccia ABV, altezza della piramide rispetto alla base ABV è allora:

$$h = \frac{3V}{Area(ABV)} = \frac{3 \cdot \frac{192}{5}a^3}{\frac{78}{5}a^2} = \frac{96}{13}a$$

La distanza di C dal piano della faccia ABV è $h = \frac{96}{13}a$.

c)

Condotto, parallelamente alla base ABC, un piano α che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di α dalla base ABC, calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.



Indicata con x l'altezza del prisma (con $0 < x < \frac{24}{5}a$), la distanza VK del piano α dal vertice V della piramide è data dalla differenza tra l'altezza VO della piramide e tale distanza x, cioè: $\frac{24}{5}a - x$.

Detto EFG il triangolo sezione tra il piano α e la piramide, per una nota proprietà risulta:

$Area(ABC): Area(EFG) = VO^2 : VK^2$, da cui: $Area(EFG) = \frac{Area(ABC) \cdot VK^2}{VO^2} = \frac{24a^2 \cdot \left(\frac{24}{5}a - x\right)^2}{\left(\frac{24}{5}a\right)^2}$

$Area(EFG) = \frac{25}{24} \cdot \left(\frac{24}{5}a - x\right)^2$; il volume del prisma è dato da:

$V(prisma) = Area(EFG) \cdot OK = \frac{25}{24} \cdot \left(\frac{24}{5}a - x\right)^2 \cdot x$;
Tale volume è massimo se lo è:

$\left(\frac{24}{5}a - x\right)^2 \cdot x$

Essendo il prodotto di due potenze con somma delle basi costante, esso risulta massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$$\frac{\frac{24}{5}a - x}{2} = \frac{x}{1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{24}{5}a - x = 2x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{8}{5}a$$

Il volume del prisma è massimo quando la sua altezza è $\frac{8}{5}a$.

d)

Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

La superficie totale del prisma è data da:

$S = 2A(base) + S_l = 2A(EFG) + perimetro(EFG) \cdot OK$

$Area(EFG) = \frac{25}{24} \cdot \left(\frac{24}{5}a - x\right)^2 \quad ; \quad x = OK$
Il triangolo EFG è simile al triangolo ABC ed il rapporto di similitudine è uguale al rapporto fra VK e VO.

$$\frac{VK}{VO} = \frac{\frac{24}{5}a - x}{\frac{24}{5}a} = \frac{24a - 5x}{24a} = k$$

Il rapporto tra il perimetro di EFG e quello di ABC è uguale a k; perciò:

$$2p(EFG) = k \cdot 2p(ABC) = \frac{24a - 5x}{24a} \cdot 24a = 24a - 5x$$

Si ha allora:

$$S = 2A(EFG) + 2p(EFG) \cdot OK = 2 \cdot \frac{25}{24} \cdot \left(\frac{24}{5}a - x\right)^2 + (24a - 5x) \cdot x$$

$$S = \frac{25}{12} \cdot \left(\frac{24}{5}a - x\right)^2 + x(24a - 5x) = \frac{1}{12}(24a - 5x)^2 + x(24a - 5x) =$$
$$= 4ax - \frac{35x^2}{12} + 48a^2$$

$$S'(x) = 4a - \frac{35}{6}x \geq 0 \quad se \quad x \leq \frac{24}{35}a \quad \left(con\ 0 < x < \frac{24}{25}a\right).\ Quindi:$$

S è crescente per $0 < x < \frac{24}{35}a$ e decrescente per $\frac{24}{35}a < x < \frac{24}{25}a$ pertanto

S è massima quando $x = \frac{24}{35}a$ che è diverso dal valore $x = \frac{8}{5}a$ per il quale è massimo il volume.

Il prisma di volume massimo NON ha anche la massima area totale.

Con la collaborazione di Angela Santamaria