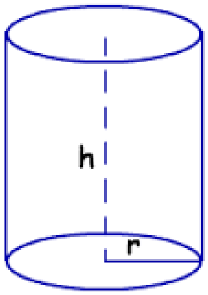
# PNI 2001 - SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

***Una industria commercializza un suo prodotto confezionandolo in lattine realizzate utilizzando fogli di una lamierina molto sottile. Ciascuna lattina, di assegnata capacità, ha la forma di un cilindro circolare retto.***
***Trascurando lo spessore del materiale, il candidato determini:***

## a)

***le dimensioni della lattina per la quale occorre la minima quantità di materiale per realizzarla.***




Dobbiamo determinare la superficie totale minima S di un cilindro di dato volume V.

$$V = \pi r^2 h\,, \quad S = 2(\pi r^2) + 2\pi r h = 2\pi(r^2 + rh)$$

S è minima se lo è $y = r^2 + rh$ ; ma risulta $h = \frac{V}{\pi r^2}$, quindi:

$$y = r^2 + rh = r^2 + r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = r^2 + \frac{V}{\pi r}, \qquad con\; r > 0.$$

**Metodo elementare**

Il minimo richiesto è quello della somma delle due quantità $r^2$ e $\frac{V}{\pi r}$. Notiamo che il prodotto di due potenze di queste quantità è costante, essendo:

$$(r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{V}{\pi r}\right)^1 = \frac{V}{\pi} = costante$$

Pertanto la somma risulta minima se le basi sono proporzionali agli esponenti:

$$\frac{r^2}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{V}{\pi r}}{1}, \quad 2r^2 = \frac{V}{\pi r}\;, \quad r^3 = \frac{V}{2\pi}, \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Per tale valore di r si ha:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = \frac{V}{\pi} \cdot \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 2r = h$$

Quindi:

la lattina per la quale occorre la minima quantità di materiale per realizzarla ha la forma di cilindro equilatero, con dimensioni

$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ e $h = 2r$ .

**Metodo delle derivate**

Basta studiare il segno della derivata della funzione $y(r) = r^2 + \frac{V}{\pi r}$ , $con\ r > 0$ .

$$y'(r) = 2r - \frac{V}{\pi r^2} \geq 0 \quad se \quad r^3 \geq \frac{V}{2\pi} \quad da\ cui \quad r \geq \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

La funzione è quindi crescente se $r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ e decrescente se $0 < r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Quindi $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ e punto di minimo relativo (e assoluto), come trovato per via elementare.

***Successivamente, posto il volume della lattina pari a 2 decilitri, se ne esplicitino le misure delle dimensioni:***

**b)**

***nel caso di cui al punto a).***

Nel caso a) abbiamo $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ e $h = 2r$ , quindi, osservando che

$V = 2\ dl\ = 0.2\ litri = 0.2\ \ dm^3 = 200\ cm^3 =$, le dimensioni r ed h in cm sono:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{200}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\ cm \cong 3.2\ cm = r \quad ed \quad h = 2r \cong 6.4\ cm = h$$

## c)

***nel caso in cui si voglia che il diametro della base sia sezione aurea dell'altezza.***

Vediamo quando il diametro di base 2r è la sezione aurea dell'altezza.

Ricordiamo che x è sezione aurea di a se è medio proporzionale fra a ed a-x, quindi:

$a : x = x : (a - x)$, da cui si ottiene: $x = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) a$

Nel nostro caso (a=h ed x=2r) deve essere:

$2r = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) h$, o anche : $h = \frac{4r}{\sqrt{5}-1}$

Essendo $V = \pi r^2 h = 200\ cm$ risulta:

$$\pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{4r}{\sqrt{5}-1} = \frac{4\pi r^3}{\sqrt{5}-1} = 200\ , da\ cui\colon\ r^3 = \frac{50(\sqrt{5}-1)}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{50(\sqrt{5}-1)}{\pi}}$$

Approssimando:

$r \cong 2.7\ cm$ e $h = \frac{4r}{\sqrt{5}-1} \cong \frac{4}{\sqrt{5}-1} \cdot 2.7\ cm = 8.7\ cm$ .

Con la collaborazione di Angela Santamaria