PNI 2001 - SESSIONE SUPPLETIVA – QUESTIONARIO

QUESITO 1

Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange illustrandone il legame con il teorema di Rolle e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

Il teorema di Lagrange afferma:

Sia y=f(x) una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato [a;b] e derivabile nell'intervallo aperto (a;b). Esiste allora almeno un punto c nell'intervallo aperto tale che:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Il teorema di Rolle è un corollario del teorema di Lagrange. Aggiungendo alle ipotesi del teorema di Lagrange l'ipotesi che sia f(a)=f(b), esso afferma che esiste almeno un punto c nell'intervallo aperto (a;b) in cui si annulla la derivata prima.

Infatti, se f(a)=f(b), per il punto c di cui parla il teorema di Lagrange si ha:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

Come corollario del teorema di Lagrange si ha il seguente teorema, che permette di studiare la monotonia di una funzione:

Nelle ipotesi del teorema di Lagrange, se la derivata della funzione nell'intervallo (a;b) è positiva allora la funzione è in esso crescente, se è negativa è decrescente.

Dimostriamo che se in (a;b) la funzione ha derivata positiva allora è ivi crescente.
A tal fine occorre dimostrare che, scelti due punti qualsiasi $x_1 \ e \ x_2$ bell'intervallo, se $x_1 < x_2 \ allora \ f(x_1) < f(x_2)$.
La funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_1; x_2]$, quindi esiste almeno un punto c tra $x_1 \ e \ x_2$ tale che:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

Ma per l'ipotesi sul segno della derivata risulta $f'(c) > 0$, quindi, essendo il denominatore positivo, deve esserlo anche il numeratore, pertanto:

$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad da\ cui \quad f(x_2) > f(x_1)$, come si voleva dimostrare.

In modo del tutto analogo si dimostra il caso derivata negativa- funzione decrescente.

QUESITO 2

Calcolare la derivata della funzione: $f(x) = arctg\ x - arctg\ \frac{x-1}{x+1}$.
Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$*?*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{D\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2x^2+2} = 0$$

Possiamo concludere che la funzione, per x <-1 e per x>-1 è costante; in particolare:

se x<-1 (per esempio $x = -\sqrt{3}$) abbiamo:

$$f(-\sqrt{3}) = arctg(-\sqrt{3}) - arctg\ \frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1} = -\frac{\pi}{3} - arctg\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) =$$
$$= -\frac{\pi}{3} - arctg\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} - arctg(2+\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{12}\pi = -\frac{3}{4}\pi$$

se x>-1 (per esempio $x = 0$) abbiamo:

$$f(0) = arctg(0) - arctg(-1) = \frac{\pi}{4}$$

Quindi:

$$f(x) = arctg\ x - arctg\ \frac{x-1}{x+1} = \begin{cases} -\frac{3}{4}\pi, & se\ x < -1 \\ \frac{\pi}{4}, & se\ x > -1 \end{cases}$$

QUESITO 3

Dire qual è il dominio della funzione $f(x) = x^\pi - \pi^x$ *e stabilire il segno della derivata prima e quello della derivata seconda di* $f(x)$ *nel punto* $x = \pi$.

La funzione è definita per $x \geq 0$

Calcoliamola derivata prima:

$f'(x) = D(x^\pi - \pi^x) = \pi x^{\pi-1} - \pi^x \cdot \ln(\pi)$

$f'(\pi) = \ \pi \cdot \pi^{\pi-1} - \pi^\pi \cdot \ln(\pi) = \pi^\pi - \pi^\pi \cdot \ln(\pi) = \pi^\pi(1 - \ln(\pi)) < 0$

perché $\ln(\pi) < \ln(e) = 1$

Calcoliamola derivata seconda:

$f''(x) = D(\pi x^{\pi-1} - \pi^x \cdot \ln(\pi)) = \pi \cdot (\pi - 1) \cdot x^{\pi-2} - \pi^x \cdot \ln^2(\pi)$

$$f''(\pi) = \ \pi \cdot (\pi - 1) \cdot \pi^{\pi-2} - \pi^\pi \cdot \ln^2(\pi) = \pi^\pi - \pi^{\pi-1} - \pi^\pi \cdot \ln^2(\pi) = \pi^\pi \left(1 - \frac{1}{\pi} - \ln^2(\pi)\right)$$

Siccome $1 - \frac{1}{\pi} - \ln^2(\pi) \cong -0.63$ risulta $f''(\pi) < 0.$

QUESITO 4

Calcolare, integrando per parti: $\int_0^1 arcsen\, x\, dx$ *.*

Cerchiamo una primitiva di $arcsen\, x$.

$$\int arcsen\, x\, dx = \int (x)' arcsen(x) dx = x\, arcsen(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$$

$$= x\, arcsen(x) + \frac{1}{2} \int (-2x)(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \ x\, arcsen(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k$$

Quindi:

$$\int_0^1 arcsen\, x\, dx = \left[x\, arcsen(x) + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = arcsen(1) + 0 - (0 + 1) = \frac{\pi}{2} - 1$$

QUESITO 5

Spiegare, anche con esempi appropriati, il significato in matematica di «concetto primitivo» e di «assioma».

Un **concetto primitivo** è un ente che non viene definito e che viene assunto come concetto base per la costruzione di una teoria (per esempio il punto o la retta della geometria euclidea).

Un **assioma** (o postulato) è una proprietà che viene assunta come vera in una teoria, una proprietà che non viene cioè dimostrata (per esempio i quinto postulato di euclide, che assume l'unicità della parallela ad una retta data per un punto dato). A dire il vero il termine postulato è utilizzato in ambito geometrico, mentre il termine assioma è utilizzato per una teoria qualsiasi; per esempio Peano costruisce una teoria assiomatica dei numeri naturali, in cui un assioma è il seguente: zero è un numero naturale.

I concetti primitivi e gli assiomi sono le basi di ogni teoria deduttiva che si presenti come sistema assiomatico.

Si può applicare la definizione di derivata (come indicato in tutti i libri di testo) oppure, se è noto che

$$D\left(e^{f(x)}\right) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$$

Più velocemente ne seguente modo:

$$D(a^x) = D\left(e^{ln(a^x)}\right) = D\left(e^{x \cdot ln(a)}\right) = \ln(a) \cdot \left(e^{x \cdot ln(a)}\right) = a^x \cdot \ln(a)$$

QUESITO 6

Nell'insieme delle cifre 1, 2, 3, …, 9 se ne scelgono due a caso. La loro somma è pari: determinare la probabilità che entrambe le cifre siano dispari.

Le coppie con somma pari sono 16:
(1,3), (1,5), (1,7), (1,9)
(2,4), (2,6), (2,8)
(3,5), (3,7), (3,9)
(4,6), (4,8)
(5,7), (5,9)
(6,8)
(7,9)

Di queste, quelle con le cifre dispari sono 10. Quindi la probabilità richiesta è:

$$p = \frac{n. coppie\ con\ somma\ pari\ e\ cifre\ dispari}{n. coppie\ con\ somma\ pari} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

QUESITO 7

Verificato che l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ *ammette una sola radice reale compresa tra 2 e 3, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.*

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 - 2x - 5$; essa, in quanto funzione razionale intera, è continua e derivabile nell'intervallo [2;3]; risulta poi:

$f(a) = f(2) = -3 < 0$, $f(b) = f(3) = 16 > 0$

Quindi, per il teorema degli zeri, la funzione si annulla almeno una volta in (2;3), come dire che l'equazione data ammette almeno una radice reale tra 2 e 3. Dimostriamo che tale radice è unica:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 > 0 \quad se \quad x < -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad vel \quad x > \sqrt{\frac{2}{3}} \ (< 2)$$

Quindi nell'intervallo (2,3) la funzione è crescente, pertanto la radice è unica (unica intersezione del grafico della funzione con l'asse x).

Applichiamo il metodo delle tangenti per risolvere l'equazione. Dobbiamo valutare il segno della derivata seconda:

$$f''(x) = 6x > 0 \quad se \quad x > 0: \quad quindi\ f''(x) > 0 \quad in \ (2;3)$$

Essendo $f(a) \cdot f''(x) < 0 \ in \ [a,b] = [2;3]$ dobbiamo assumere come punto iniziale di iterazione $x_0 = b = 3$.

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; Quindi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2\,x_n - 5}{3\,x_n^2 - 2}$$

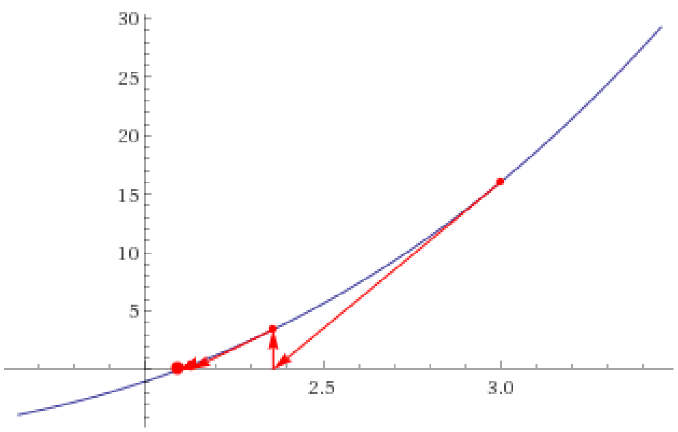
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} \cong 2.360$; $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.360 - \frac{f(2.360)}{f'(2.360)} \cong 2.1272$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.127 - \frac{f(2.1272)}{f'(2.1272)} \cong 2.0951$; $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2.127 - \frac{f(2.0951)}{f'(2.0951)} \cong 2.0946$

Quindi la radice approssimata a meno di un centesimo è: $x = 2.09$.

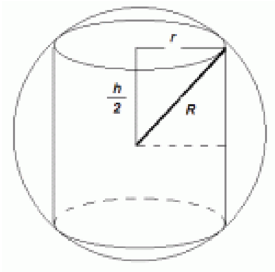
Valore esatto della radice: 2.094551…

Diagramma di iterazione:



QUESITO 8

Calcolare il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.



Essendo il cilindro equilatero l'altezza h è uguale al diametro di base 2r. Indichiamo con R il raggio della sfera circoscritta. Risulta:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

La superficie totale del cilindro è:

$$S_t(cilindro) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r(2r) = 6\pi r^2$$

La superficie della sfera è:

$$S(sfera) = 4\pi R^2 = 4\pi(2r^2) = 8\pi r^2$$

Il rapporto fra le due superfici è quindi:

$$\frac{S_t(cilindro)}{S(sfera)} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4}$$

QUESITO 9

Dire (motivando la risposta) se è possibile inscrivere in una semicirconferenza un triangolo che non sia rettangolo. Ovvero, con i versi di Dante:

... se del mezzo cerchio far si puote
triangol sì ch'un retto non avesse. (Paradiso, XIII, 101-102)

No, ogni rettangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.

Infatti, poiché un lato del triangolo deve coincidere con il diametro della semicirconferanza, l'angolo alla circonferenza ad esso opposto è retto, essendo il corrispondente angolo al centro piatto (ricordiamo che un angolo alla circonferenza è metà dell'angolo al centro corrispondente).

Con la collaborazione di Angela Santamaria