

**ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**  
**SPERIMENTAZIONI AUTONOME 1**

**SECONDA PROVA SCRITTA**  
**Tema di MATEMATICA**

**PROBLEMA 1**

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche  $(x, y)$ , si consideri il luogo geometrico  $g$  dei punti  $P$  che vedono il segmento di estremi  $A(0, 1)$  e  $B(2, 1)$  sotto un angolo  $\widehat{APB}$  di ampiezza  $\pi/4$  e se ne disegni il grafico.

Nel semipiano delle ordinate  $y > 1$  si tracci la retta  $y = k$ , se ne indichino con  $C$  e  $D$  le eventuali intersezioni con  $g$  e con  $C'$  e  $D'$  le loro proiezioni ortogonali su  $AB$ . Si determinino i valori di  $k$  che rendono massime rispettivamente le seguenti grandezze:

- il lato obliquo del trapezio isoscele  $ABDC$ ;
- la diagonale del rettangolo  $CDD'C'$ ;
- il cilindro generato dalla rotazione di  $CDD'C'$  attorno all'asse del segmento  $AB$ .

**PROBLEMA 2**

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche  $(x, y)$ , si consideri la funzione:

$$y = \frac{x^3 + a}{(x + b)^2}$$

- si determinino  $a$  e  $b$  in modo che il grafico della curva  $g$  che ne risulta passi per il punto  $P(2, 0)$  e abbia per asintoto la retta  $x = -1$ ;
- si scriva l'equazione dell'asintoto obliquo  $t$ ;
- si determini l'angolo  $\alpha$  che  $t$  forma con la tangente a  $g$  nel punto di intersezione tra  $g$  e  $t$ ;
- si tracci il grafico di:

$$y = \frac{|x^3 + a|}{(x + b)^2}$$

**QUESTIONARIO**

- Il rapporto delle aree laterali di due coni aventi basi uguali è uguale al rapporto degli apotemi mentre il rapporto dei loro volumi è uguale al rapporto delle altezze.
- Verificare, ricorrendo direttamente alla definizione, che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

- Enunciare il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* e utilizzarlo per dimostrare che:

$$|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$$

4. Di una funzione  $f(x)$  si sa che  $f(0) = (1/\log 2)^2$ ,  $f'(0) = 0$  e che ha derivata seconda uguale a  $2^x$ . Si può dire quanto vale  $f(x)$ ?

5. Calcolare la derivata della funzione:

$$f(x) = 2 \arcsen x - \arccos(1 - 2x^2)$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la  $f(x)$ ?

6. Dimostrare che:

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

7. Calcolare, con uno dei metodi numerici studiati, un valore approssimato della radice dell'equazione:

$$x - \log(2 - x) = 0$$

8. Tenuto conto che è:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcolare  $p$  con 3 cifre decimali esatte utilizzando una formula d'integrazione approssimata.

9. Tra 15 videogiochi di cui 5 difettosi se ne scelgono 3 a caso. Determinare la probabilità che

- a) nessuno dei tre sia difettoso;
- b) almeno uno dei tre non sia difettoso

10. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Dire come variano il suo volume e l'area della sua superficie.

**La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario.**

---

Durata massima della prova 16 ore

E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.