

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

1. In un piano α è assegnata una parabola avente il fuoco e il vertice nei punti rispettivamente F e V tali che $\overline{VF} = \frac{1}{2}$. Riferito il piano α ad un conveniente sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy:
- Determinare l'equazione della parabola.
 - Condotta per F una retta di coefficiente angolare m, indicati con A e B i punti in cui tale retta seci la parabola e condotte quindi le rette tangenti alla parabola stessa in questi punti, esprimere in funzione di m le coordinate del punto P in cui si secano tali tangenti.
 - Verificare che il punto P appartiene alla direttrice della parabola.
 - Chiamate A', B', P' le posizioni dei punti A, B, P corrispondenti al particolare valore $m = \frac{1}{2}$, trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti A', B', P' .
 - Calcolare le aree delle regioni in cui la parabola divide il cerchio delimitato dalla circonferenza trovata.
2. a) Studiare la funzione $y = \frac{1}{\cos x} - \cos x$, con $-\pi \leq x \leq \pi$ e disegnarne l'andamento.
b) Dopo aver dimostrato che
- $$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \text{ dove } t = \tan \frac{x}{2}$$
- esprimere in funzione di t l'espressione: $\frac{1}{\cos x} - \cos x$.
- Studiare la funzione di t così trovata e disegnarne l'andamento.
 - A completamento del problema dimostrare che: condizione sufficiente ma non necessaria affinché una funzione $f(x)$, derivabile almeno due volte in un punto a , abbia ivi un minimo relativo è che risulti $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$.
3. a) Fornire la definizione di piramide retta.
b) Tra le piramidi rette triangolari, aventi la stessa altezza e uguale perimetro di base, determinare quella che ha il volume massimo.
c) Tale piramide ha anche la massima area laterale?
d) Posto che la piramide triangolare retta considerata abbia altezza h , perimetro di base $\frac{3}{2}h\sqrt{3}$ e volume massimo, calcolare il volume e l'area laterale della piramide.