LICEO SCIENTIFICO 1999 – ESTERO

PROBLEMA 1

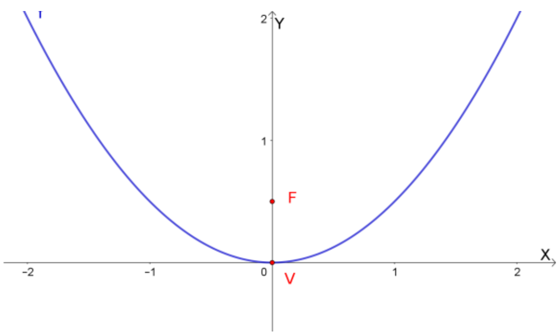
In un piano α è assegnata una parabola avente il fuoco e il vertice nei punti rispettivamente F e V tali che $\overline{VF} = \frac{1}{2}$. Riferito il piano α ad un conveniente sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy.

a)

Determinare l'equazione della parabola.

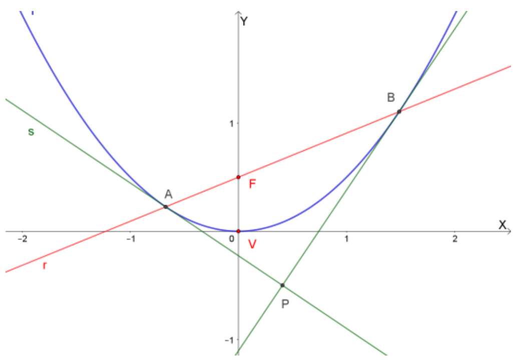
Fissiamo il sistema di riferimento in modo che il vertice V coincida con l'origine degli assi cartesiani, l'asse di simmetria della parabola sia l'asse delle y e la concavità sia rivolta verso l'alto.
La parabola ha quindi equazione del tipo: $y = ax^2 \ \ (con\ a > 0)$

L'ascissa del fuoco è $x_F = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2}$, quindi: $a = \frac{1}{2}$. La parabola ha quindi equazione: $y = \frac{1}{2}x^2$.
Il suo grafico è il seguente:



b)

Condotta per F una retta di coefficiente angolare m, indicati con A e B i punti in cui tale retta seca la parabola e condotte quindi le rette tangenti alla parabola stessa in questi punti, esprimere in funzione di m le coordinate del punto P in cui si secano tali tangenti.



La generica retta per F ha equazione: $y = mx + \frac{1}{2}$

Cerchiamo le intersezioni A e B con la parabola:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = mx + \frac{1}{2} \end{cases} ; \; \frac{1}{2}x^2 = mx + \frac{1}{2} \; ; \; x^2 - 2mx - 1 = 0; \; \frac{\Delta}{4} = m^2 + 1 > 0 \; per \; ogni \; m.$$

$$x = m \pm \sqrt{m^2+1}; \; quindi, \qquad x_A = m - \sqrt{m^2+1}, \; y_A = m^2 - m\sqrt{m^2+1} + \frac{1}{2}$$
$$x_B = m + \sqrt{m^2+1}, \; y_B = m^2 + m\sqrt{m^2+1} + \frac{1}{2} \; . Perci\grave{o}:$$

$$A = \left(m - \sqrt{m^2+1}\, ; \; m^2 - m\sqrt{m^2+1} + \frac{1}{2}\right); \; B = \left(m + \sqrt{m^2+1}\, ; \; m^2 + m\sqrt{m^2+1} + \frac{1}{2}\right)$$

Per trovare le equazioni delle tangenti in A e B usiamo per comodità la formula di sdoppiamento:

L'equazione della parabola $y = \frac{1}{2}x^2$ si doppia in questo modo: $\frac{y+y_0}{2} = \frac{1}{2}\, x \cdot x_0$

Tangente in A: $\frac{y + m^2 - m\sqrt{m^2+1} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}x\left(m - \sqrt{m^2+1}\right);$

$$y + m^2 - m\sqrt{m^2+1} + \frac{1}{2} = x\left(m - \sqrt{m^2+1}\right); y = \left(m - \sqrt{m^2+1}\right)x - m^2 + m\sqrt{m^2+1} - \frac{1}{2}$$

Tangente in B: $\frac{y + m^2 + m\sqrt{m^2+1} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}x\left(m + \sqrt{m^2+1}\right)$

$$y = \left(m + \sqrt{m^2+1}\right)x - m^2 - m\sqrt{m^2+1} - \frac{1}{2}$$

Osserviamo che le due tangenti sono perpendicolari.

Infatti, indicati con $m_1 \; ed \; m_2$ i rispettivi coefficienti angolari:

$m_1 = \left(m - \sqrt{m^2+1}\right) \; ed \; m_2 = \left(m + \sqrt{m^2+1}\right)$, risulta:

$$m_1 \cdot m_2 = \left(m - \sqrt{m^2+1}\right) \cdot \left(m - \sqrt{m^2+1}\right) = m^2 - (m^2+1) = -1$$

Ricordiamo una nota proprietà della parabola: le tangenti ad una parabola da un punto qualsiasi della direttrice sono tra loro perpendicolari e la retta che congiunge i punti di tangenza passa per il fuoco della parabola stessa.

ANIMAZIONE CON GEOGEBRA

Il punto d'intersezione P delle due tangenti si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \left(m - \sqrt{m^2+1}\right)x - m^2 + m\sqrt{m^2+1} - \frac{1}{2} \\ y = \left(m + \sqrt{m^2+1}\right)x - m^2 - m\sqrt{m^2+1} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sottraendo a membro si ha:

$$0=\left(m-\sqrt{m^2+1}\right)x-m^2+m\sqrt{m^2+1}-\tfrac{1}{2}-\left(m+\sqrt{m^2+1}\right)x+m^2+m\sqrt{m^2+1}+\tfrac{1}{2}$$

$$x\left(m-\sqrt{m^2+1}-m-\sqrt{m^2+1}\right)+2m\sqrt{m^2+1}\,;\ \left(-2m\sqrt{m^2+1}\right)x=\left(-2m\sqrt{m^2+1}\right);$$

quindi $x=m$ Sostituiamo nella prima equazione del sistema:

$$\begin{cases} y=\left(m-\sqrt{m^2+1}\right)m-m^2+m\sqrt{m^2+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2} \\ x=m \end{cases}$$

Il punto di intersezioni delle due tangenti è quindi: $P=\left(m;\ -\frac{1}{2}\right)$.

Osserviamo che il luogo descritto da P ha equazione $y=-\frac{1}{2}$, che, come vedremo, è l'equazione della direttrice della parabola.

c)

Verificare che il punto P appartiene alla direttrice della parabola.

La direttrice della parabola di equazione $y=\frac{1}{2}x^2$ ha equazione $y=\frac{-1-\Delta}{4a}=-\frac{1}{2}$.
Poiché l'ordinata di P è $-\frac{1}{2}$ per ogni valore di m possiamo concludere che:

P appartiene alla direttrice per ogni valore di m.

d)

Chiamate A', B', P' le posizioni dei punti A, B, P corrispondenti al particolare valore $m=\frac{1}{2}$ trovare l'equazione della circonferenza passante per i punti A', B', P'.

Per $m=\frac{1}{2}$ la retta passante per il fuoco F ha equazione: $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ed i punti A, B, P avranno le seguenti coordinate:

$$A=\left(m-\sqrt{m^2+1}\,;\ m^2-m\sqrt{m^2+1}+\frac{1}{2}\right)$$

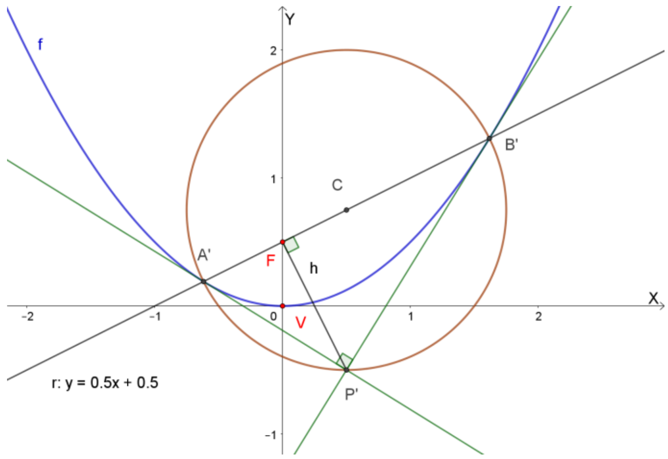
$$A'=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+1};\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+1}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}};\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5};\ \frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)=A'$$

$$B=\left(m+\sqrt{m^2+1}\,;\ m^2+m\sqrt{m^2+1}+\frac{1}{2}\right)$$

$$B'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5};\ \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)$$

$$P'=\left(m\,;\ -\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\,;\ -\frac{1}{2}\right)$$

Rappresentiamo la parabola con i punti A', B', P' e l'angolo in P retto (come già osservato):



La circonferenza ha come diametro $A'B'$ e come centro il punto medio C del segmento $A'B'$.

Cerchiamo C:

$$x_C = \frac{x_{A'} + x_{B'}}{2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}\ ;\ y_C = \frac{y_{A'} + y_{B'}}{2} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{4}\ .\ Quindi:$$

$$C = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$$

Osserviamo che il raggio della circonferenza può essere calcolato più velocemente come distanza CP'. Riportiamo le coordinate di P': $\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.

$$R = \overline{CP'} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = R$$

La circonferenza ha quindi equazione:

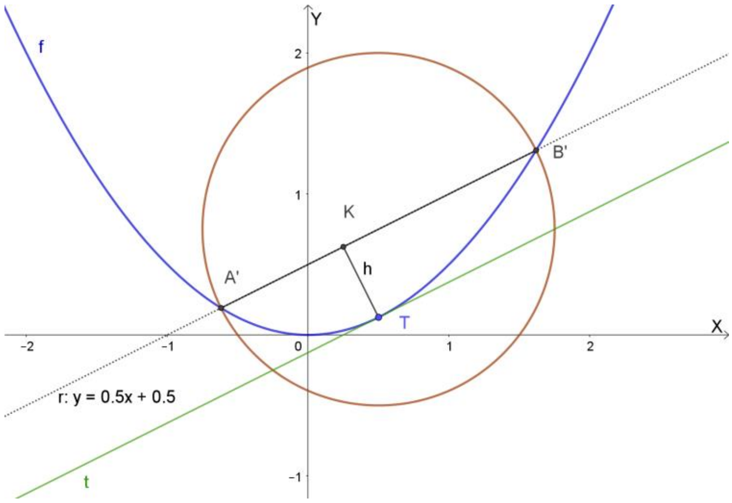
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}\ ;\quad x^2 + y^2 - x - \frac{3}{2}y = \frac{12}{16}\ ,\quad x^2 + y^2 - x - \frac{3}{2}y - \frac{3}{4} = 0\ .$$

e)

Calcolare le aree delle regioni in cui la parabola divide il cerchio delimitato dalla circonferenza trovata.

Le due parti richieste sono: semicerchio + segmento parabolico $A'VB'$ e semicerchio – segm. par. $A'VB'$.

Ricordiamo che l'area S di un segmento parabolico è uguale ai due terzi dell'area del rettangolo circoscritto (cioè del rettangolo avente un lato uguale alla corda $A'B'$ ed il lato opposto appartenete alla tangente alla parabola parallela alla corda): $S = \frac{2}{3}\ \overline{A'B'}\ \cdot h$ (essendo h la distanza del punto di tangenza T della parallela alla corda dalla retta che contiene la corda stessa).



La lunghezza del segmento $A'B'$ è il doppio del raggio, che abbiamo già calcolato:

$\overline{A'B'} = 2R = 2 \cdot \overline{CP'} = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$.

Il generico coefficiente angolare della tangente alla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2$ è $y' = m = x$.

Quindi, posto $T = (x_T; y_T)$, la tangente t alla parabola parallela alla retta r di equazione: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Ha coefficiente angolare $m_T = \frac{1}{2}$. Ma è anche $m_T = y'(x_T) = x_T$, quindi: $x_T = \frac{1}{2}$.

Ma T appartiene alla parabola, quindi: $y_T = \frac{1}{2}x_T^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$: $T = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$.

Calcoliamo ora la distanza del punto T dalla retta $A'B'$, di equazione $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $x - 2y + 1 = 0$.

Si ha perciò:

$$\overline{TK} = h = \frac{|ax_T + by_T + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|x_T - 2y_T + 1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 1\right|}{\sqrt{1+4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{5}{4\sqrt{5}} = \overline{TK} = h$$

Il segmento parabolico ha quindi area:

$$S = \frac{2}{3}\,\overline{A'B'} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{4\sqrt{5}} = \frac{25}{12\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{12} = S = area\ segmento\ parabolico$$

Le due aree richieste sono quindi:

$$S_1 = area(semicerchio) + area(segmento\ parabolico) = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{12} = \frac{\pi\left(\frac{5}{4}\right)^2}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{12} =$$

$$= \frac{25}{32}\pi + \frac{5\sqrt{5}}{12} = S_1$$

$$S_2 = \frac{25}{32}\pi - \frac{5\sqrt{5}}{12}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria