LICEO SCIENTIFICO 1999 – ESTERO

PROBLEMA 2

a)

Studiare la funzione $y = f(x) = \frac{1}{\cos x} - \cos x$ *, con* $-\pi \leq x \leq \pi$ *e disegnarne l'andamento.*

Dominio: $\cos x \neq 0,\ x \neq \pm\frac{\pi}{2}$: $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$

Simmetrie notevoli: essendo $f(-x) = f(x)$ la funzione è pari (grafico simmetrico rispetto all'asse y)

Intersezioni con gli assi cartesiani:

se $x = 0, y = 0$; $se\ y = 0,\ \frac{1}{\cos x} - \cos x = 0$, $1 = \cos^2 x, \cos x = \pm 1$: $x = -\pi$, $x = 0\ e\ x = \pi$.

Segno della funzione:

$$\frac{1}{\cos x} - \cos x > 0, \qquad \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} \geq 0\ , \qquad \frac{\sin^2 x}{\cos x} \geq 0\ , \quad \cos x > 0:\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Limiti:

$$\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) = \lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) = \lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

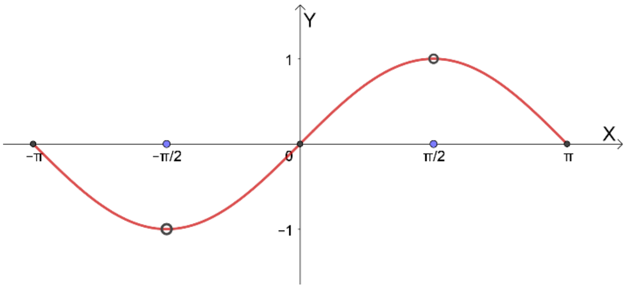
$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

Asintoti: ci sono gli asintoti verticali $x = \pm\frac{\pi}{2}$

Studio derivata prima:

$$f'(x) = D\left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} + \sin x = \frac{\sin x(1 + \cos^2 x)}{\cos^2 x} \geq 0\ \ se\ \sin x \geq 0\ \ (nel\ dominio)$$

Essendo il dominio $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$, risulta $\sin x \geq 0$ se (vedi grafico seguente):



$0 \le x < \frac{\pi}{2}$ $, \frac{\pi}{2} < x \le \pi$

In tali intervalli la funzione è crescente, nella parte rimanente del dominio è decrescente. Avremo massimi relativi per $x = -\pi \;\; e \;\; x = \pi$, minimo relativo per $x = 0$.

Studio derivata seconda:

$f'(x) = \frac{\sin x(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \sin x;$

$f''(x) = \frac{\cos x \cos^2 x - \sin x(-2\sin x \cos x)}{\cos^4 x} + \cos x = \frac{\cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x + \cos^5 x}{\cos^4 x} \ge 0$ se:

$\cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x + \cos^5 x \ge 0\,,$ $\quad \cos^3 x + 2\,(1-\cos^2 x)\,x \cos x + \cos^5 x \ge 0\,,$

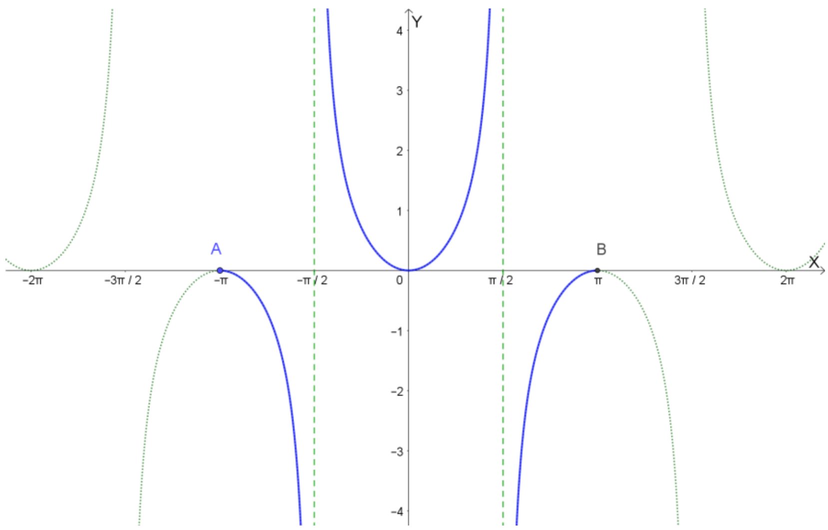
$\cos^3 x + 2\cos x - 2\cos^3 x + \cos^5 x \ge 0\,,$ $\quad \cos^5 x - \cos^3 x + 2\cos x \ge 0\,,$

$\cos x\,(\cos^4 x - \cos^2 x + 2) \ge 0;\ \cos x \ge 0 \;\; per \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; studiamo: $\cos^4 x - \cos^2 x + 2 \ge 0.$

Ponendo $\cos^2 x = t \;\; si \; ha \;\; t^2 - t + 2 \ge 0$ che è sempre verificata essendo $\Delta = 1 - 8 < 0$. Quindi:

$f''(x) \ge 0$ se $\cos x \ge 0 \;\; cioè \;\; per \;\; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$: in tale intervallo il grafico della funzione volge la concavità verso l'alto, nella parte rimanente del dominio volge la concavità verso il basso. Non ci sono flessi.

Grafico della funzione:



b)

Dopo aver dimostrato che

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \;, \; dove \;\; t = \tan\frac{x}{2}$$

esprimere in funzione di t l'espressione: $\frac{1}{\cos x} - \cos x$.

Partiamo dalla relazione $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ che possiamo scrivere nella forma:

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos x$$

Dove si è posto (come richiesto) $t = \tan\frac{x}{2}$. Osserviamo che queste formule valgono solo se è soddisfatta la seguente condizione: $\cos^2\frac{x}{2} \neq 0$ (perché abbiamo diviso numeratore e denominatore per questo fattore).

Ma $\cos^2\frac{x}{2} \neq 0$ se $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, *quindi*: $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\;\; x \neq \pi + 2k\pi \quad (con \;\; k \in \mathbb{Z})$.

Esprimiamo ora $\frac{1}{\cos x} - \cos x$ in funzione di t:

$$\frac{1}{\cos x} - \cos x = \frac{1+t^2}{1-t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{(1+t^2)^2-(1-t^2)^2}{(1-t^2)(1+t^2)} = \frac{4t^2}{1-t^4} = \frac{1}{\cos x} - \cos x$$

Con le condizioni , $x \neq \pi + 2k\pi$ e (dovendo essere $\cos x \neq 0$), $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

c)

Studiare la funzione di t così trovata e disegnarne l'andamento.

Prescindiamo dalle condizioni sulla *t* dovute al fatto che $t = \tan\frac{x}{2}$.

Dobbiamo studiare la funzione di equazione:

$$y = f(t) = \frac{4t^2}{1-t^4}$$

Dominio: $1 - t^4 \neq 0\,;\;\; t^4 \neq 1\;,\;\; t \neq \pm 1 :\;\; -\infty < t < -1\,, -1 < t < 1\,,\;\; 1 < t < +\infty$

Simmetrie notevoli: $f(-t) = f(t)$. La funzione è pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Intersezioni con gli assi: se $se\ t = 0\,, y = 0\,;\ \ se\ y = 0\,,\ \frac{4t^2}{1-t^4} = 0\,,\ 4t^2 = 0,\ t = 0$. Quindi il grafico della funzione taglia gli assi cartesiani solo nell'origine.

Segno della funzione: $f(t) \geq 0\,;\ \ se\ \ t = 0\ \ f(t) = 0,\ \ mentre\ f(t) > 0\ se\ 1 - t^4 > 0\,,\ t^4 < 1\,,$

$-1 < t < 1$. Il grafico della funzione taglia gli assi cartesiani se $t = 0$, è al disopra dell'asse delle ascisse se $-1 < t < 1\ (con\ t \neq 0)$, è al disotto dell'asse delle ascisse se $t < -1\ \ o\ \ t > 1$.

Limiti:

$$\lim_{t\to\mp\infty} f(t) = \lim_{t\to\mp\infty} \frac{4t^2}{1-t^4} = \lim_{t\to\mp\infty} \frac{4t^2}{-t^4} = \lim_{t\to\mp\infty} \frac{4}{-t^2} = 0^-\ :\ \ y = o\ asintoto\ orizzontale\ per\ t \to \pm\infty$$

(quindi non ci sono asintoti obliqui).

$$\lim_{t\to(-1)^-} f(t) = \lim_{t\to(-1)^-} \frac{4t^2}{1-t^4} = \left[\frac{4}{1-1^+}\right] = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty = \lim_{t\to 1^+} f(t)\ \ perchè\ la\ funzione\ è\ pari$$

$$\lim_{t\to(-1)^+} f(t) = \lim_{t\to(-1)^+} \frac{4t^2}{1-t^4} = \left[\frac{4}{1-1^-}\right] = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty = \lim_{t\to 1^-} f(t)\ \ perchè\ la\ funzione\ è\ pari$$

Quindi abbiamo gli asintoti verticali (destri e sinistri) $t = \pm 1$.

Studio della derivata prima:

$$f(t) = \frac{4t^2}{1-t^4}\ \ ;\ \ f'(t) = \frac{8t(1-t^4) - 4t^2(-4t^3)}{(1-t^4)^2} = \frac{8t^5 + 8t}{(1-t^4)^2} = \frac{8t(t^4+1)}{(1-t^4)^2} \geq 0\ \ se$$

$t \geq 0\ (nel\ dominio)$,

Quindi $f'(t) \geq 0\ \ se\ \ t \geq 0\,, nel\ dominio$: il grafico è quindi crescente per $0 < t < 1\ \ e\ \ t > 1$, decrescente per $t < -1\ \ e\ \ -1 < t < 0$ ed ha un minimo relativo per $t = 0$.

Studio della derivata seconda:

$$f'(t) = \frac{8t^5 + 8t}{(1-t^4)^2} = 8 \cdot \frac{t^5 + t}{(1-t^4)^2}$$

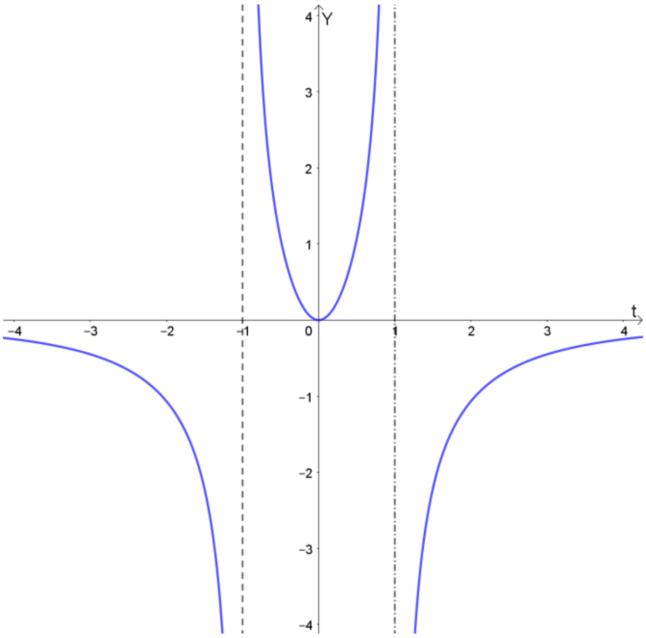
$$f''(t) = \cdots = 8 \cdot \frac{(1-t^4)(3t^8 + 12t^4 + 1)}{(1-t^4)^4} \geq 0\ \ se$$

$(1-t^4)(3t^8 + 12t^4 + 1) \geq 0; (1-t^2)(1+t^2)(3t^8 + 12t^4 + 1) \geq 0, \qquad 1 - t^2 \geq 0\,,\ \ perchè$

$3t^8 + 12t^4 + 1 > 0\ \ e\ 1 + t^2 > 0\ \ \ per\ ogni\ t$; quindi: $f''(t) > 0\ per - 1 < t < 1$.

Il grafico della funzione volge quindi la concavità verso l'alto per $-1 < t < 1$ e verso il basso per $t < -1\ \ \ or\ \ \ t > 1$. Non ci sono flessi.

Grafico della funzione:



d)

A completamento del problema dimostrare che: condizione sufficiente ma non necessaria affinché una funzione $f(x)$, derivabile almeno due volte in un punto a, abbia ivi un minimo relativo è che risulti $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$.

Dobbiamo dimostrare che:

Se una funzione f(x) è derivabile almeno due volte nel punto $x = a$ e risulta $f'(a) = 0$ ed $f''(a) > 0$, allora $x = a$ è punto di minimo relativo. Non è detto il viceversa, cioè la funzione può avere in $x = a$ un minimo relativo senza che risulti $f'(a) = 0$ ed $f''(a) > 0$.

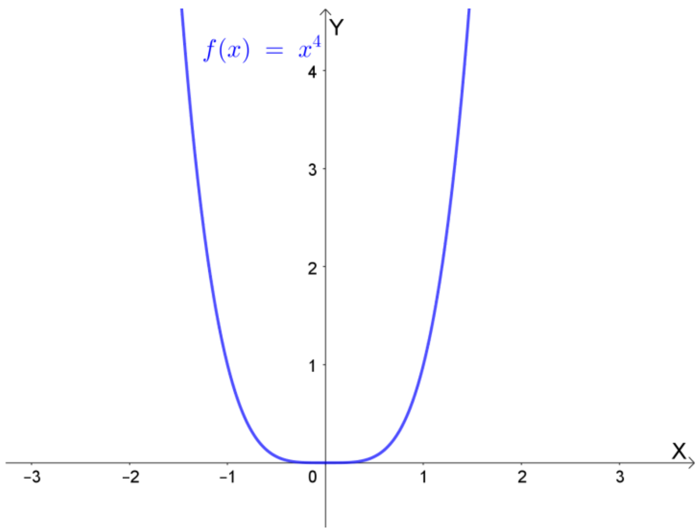
Supponiamo quindi che la funzione sia derivabile almeno due volte in $x = a$, che risulti $f'(a) = 0$ ed $f''(a) > 0$ e dimostriamo che $x = a$ è punto di minimo relativo per la funzione.

Dimostrazione

Se $f'(a) = 0$ allora $x = a$ è un punto a tangente orizzontale (quindi in $x = a$ ci può essere un minimo, un massimo o un flesso a tangente orizzontale). Se $f''(a) > 0$ allora la funzione in $x = a$ volge la concavità verso l'alto (per un noto teorema): ciò è sufficiente per affermare che $x = a$ è punto di minimo relativo.

Dimostriamo con un controesempio che la suddetta condizione non è necessaria, cioè che la funzione può avere in $x = a$ un minimo relativo senza che risulti $f'(a) = 0 \;\; ed \;\; f''(a) > 0$.

Consideriamo a tal proposito la funzione $f(x) = x^4$. La funzione è derivabile due volte in $x = a$ (in quanto funzione polinomiale) e risulta: $f'(x) = 4x^3$, $f'(0) = 0$; inoltre: $f''(x) = 12x^2 \;\; ed$ è $f''(0) = 0$, quindi non è $f''(0) > 0$. Eppure la funzione ammette in $x = 0$ un minimo relativo (che è anche assoluto) come si può facilmente evincere da un grafico sommario della funzione:



Con la collaborazione di Angela Santamaria