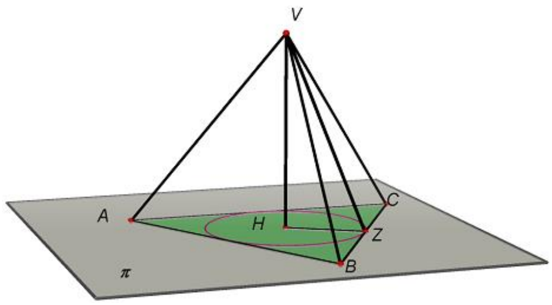
LICEO SCIENTIFICO 1999 – ESTERO

PROBLEMA 3

a)

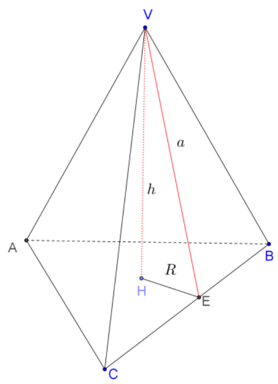
Fornire la definizione di piramide retta.



Una piramide si dice retta se nella sua base è inscrittibile una circonferenza il cui centro coincide con il piede dell'altezza della piramide.

b)

Tra le piramidi rette triangolari, aventi la stessa altezza e uguale perimetro di base, determinare quella che ha il volume massimo.



Sono noti l'altezza h ed il perimetro di base $2p$. Osserviamo che HE (con H centro della circonferenza inscritta ed E punto di tangenza al lato BC) è uguale, per la definizione data nel punto a), al raggio R della circonferenza inscritta nella base.
Inoltre, per una nota proprietà, l'area del poligono circoscritto ad un cerchio è data da: $Area = pR$, dove p è il semiperimetro del poligono.

Il volume della piramide è dato da:

$V = \frac{1}{3} \cdot\ Area(base) \cdot h$; quindi, per quanto detto sopra:

$V = \frac{1}{3} \cdot Area(base) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot\ pR \cdot h\ (con\ p\ ed\ h\ noti)$. Questo volume è massimo se è massimo R. Quindi dobbiamo stabilire *qual è il massimo raggio della circonferenza inscritta in un triangolo di dato perimetro.*

In base alla formula richiamata sopra, ed alla formula di Eulero per il calcolo dell'area di un triangolo di lati a, b e c, il raggio R della circonferenza inscritta nel triangolo di dato perimetro $2p$ è dato da:

$R = \frac{Area(ABC)}{p(ABC)} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$; ma R è massimo se lo è il suo quadrato (ricordiamo che $R > 0$),

quindi R è massimo se lo è:

$$\left(\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}\right)^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

Essendo p costante, tale quantità è massima se lo è: $(p-a)(p-b)(p-c)$. Si tratta del prodotto di tre quantità positive la cui somma è costante: $p-a+p-b+p-c = 3p-2p = p$.

Ma esiste la seguente proprietà:

"Il prodotto di tre numeri positivi la cui somma è costante è massimo se i tre numeri sono uguali"

Quindi, in conclusione, R è massimo se $p-a = p-b = p-c$, cioè se $a = b = c$.

Possiamo quindi concludere che:

Tra le piramidi rette triangolari, aventi la stessa altezza e uguale perimetro di base, quella che ha il volume massimo è la piramide la cui base è un triangolo equilatero.

Osserviamo che in questo caso, indicato con p il semiperimetro del triangolo, con l il suo lato e ricordando che l'area di un triangolo equilatero di lato l è data da:

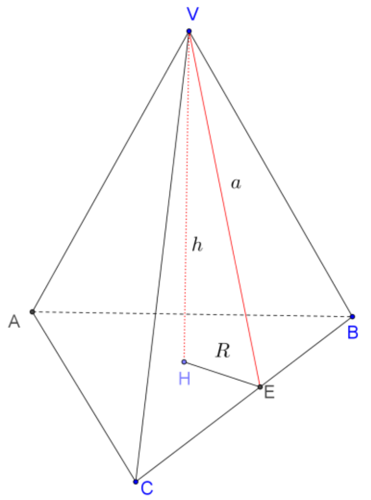
$Area(ABC) = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, risulta: $R = \frac{Area(ABC)}{p} = \frac{l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3l}{2}} = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = R$

c)

Tale piramide ha anche la massima area laterale?

Dobbiamo verificare se "*tra le piramidi rette triangolari, aventi la stessa altezza e uguale perimetro di base, quella che ha il volume massimo ha anche area laterale massima*".

Ricordiamo che la superficie laterale di una piramide retta è data da: $S_l = p \cdot a$, dove p è il semiperimetro della base ed a l'apotema della piramide. Questa superficie laterale è massima se lo è l'apotema. Riprendiamo la figura della piramide e calcoliamo l'apotema:



Calcoliamo l'apotema tenendo presente che il triangolo VHE è rettangolo in H.

$a = \sqrt{h^2 + R^2}$; a *(quantità positiva) è massima se lo è il suo quadrato, cioè se è massima la quantità:* $y = h^2 + R^2$, *con h costante*. Ma, essendo h costante, y è massima se lo è R^2, *quindi* R.

In conclusione: *tra le piramidi rette triangolari, aventi la stessa altezza e uguale perimetro di base, quella che ha area laterale massima* si ha quando è massimo il raggio della circonferenza inscritta nella base, che è la stessa conclusione del punto precedente.

Quindi la risposta è affermativa:

tra le piramidi rette triangolari, aventi la stessa altezza e uguale perimetro di base, quella che ha il volume massimo ha anche area laterale massima".

d)

Posto che la piramide triangolare retta considerata abbia altezza h, perimetro di base $\frac{3}{2}h\sqrt{3}$ *e volume massimo, calcolare il volume e l'area laterale della piramide.*

Ricordiamo che il volume massimo si ha quando la base è un triangolo equilatero di lato l ed il raggio della circonferenza inscritta nella base vale $R = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}$. Se il perimetro di base è $\frac{3}{2}h\sqrt{3}$, si ha che:

$$l = \frac{2p}{3} = \frac{\frac{3}{2}h\sqrt{3}}{3} = h\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e \quad R = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = h\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{h}{4}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot Area(base) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot pR \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}h\sqrt{3} \cdot \frac{h}{4} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{16}h^3 = Volume\ piramide$$

Calcoliamo ora l'area della superficie laterale della piramide applicando la formula:

$S_l = p \cdot a$, dove p è il semiperimetro della base ed a l'apotema della piramide.

Essendo $2p = \frac{3}{2} h \sqrt{3}$, *segue che* $p = \frac{3}{4} h \sqrt{3}$. Per quanto riguarda l'apotema abbiamo già detto che:

$$a = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{h}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{16} h^2} = \frac{\sqrt{17}}{4} h \ . Quindi:$$

$$S_l = p \cdot a = \frac{3}{4} h \sqrt{3} \cdot \frac{h}{4} \sqrt{17} = \frac{3}{16} \sqrt{51}\, h^2 = S_l$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria