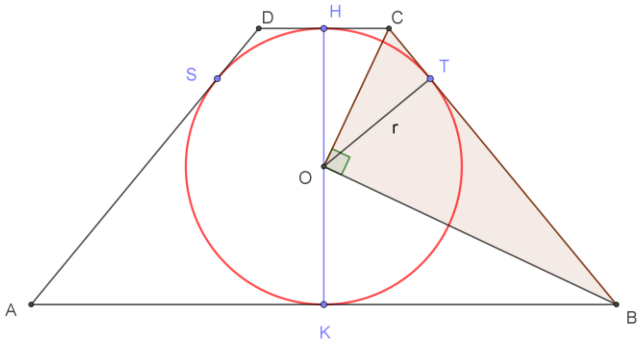
LICEO SCIENTIFICO STRAORDINARIA 2000 – PROBLEMA 2

È assegnato un tronco di cono il cui volume è doppio di quello di una sfera di raggio r. Stabilire se tale tronco può essere circoscritto alla sfera e in caso affermativo esprimere i raggi delle basi del tronco in funzione del raggio r della sfera. Generalizzare la questione ponendo uguale a k il rapporto tra il volume del tronco di cono e quello della sfera; stabilire le condizioni di risolubilità del problema illustrando altresì il caso $k = \frac{3}{2}$.

a)

Stabiliamo se il tronco di cono può essere circoscritto alla sfera e in caso affermativo esprimiamo i raggi delle basi del tronco in funzione del raggio r della sfera.

Consideriamo la sezione ottenuta con un piano contenente l'altezza del cono ed i diametri delle due basi del cono (AB e CD).



Il tronco sarà circoscritto alla sfera se e solo se il quadrilatero ABCD è circoscritto alla circonferenza sezione della sfera col piano suddetto. Affinchè ciò avvenga la somma dei lati opposti AB e CD deve essere uguale alla somma dei lati opposti BC e AD e, per una nota proprietà, il triangolo BOC è rettangolo in O, quindi (per il secondo Teorema di Euclide) si ha: $r^2 = BT \cdot CT = KB \cdot HC = AK \cdot DH$.

Posto $AK = x$, con $r \le x \le 2r$ abbiamo:

$$r^2 = BT \cdot CT = KB \cdot HC = AK \cdot DH = x \cdot DH, \qquad DH = \frac{r^2}{x} \ (*)$$

Il volume del tronco è il doppio del volume della sfera, quindi:

$$V(sfera) = \frac{4}{3}\pi r^3; \ \ V(tronco) = \frac{1}{3}\pi(AK^2 + DH^2 + AK \cdot DH)HK$$

$$\frac{V(tronco)}{V(sfera)} = 2; \ \frac{\frac{1}{3}\pi(AK^2 + DH^2 + AK \cdot DH)HK}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{(AK^2 + DH^2 + AK \cdot DH) \cdot 2r}{4r^3} =$$

$$= \frac{(AK^2 + DH^2 + AK \cdot DH)}{2r^2} = \frac{x^2 + \frac{r^4}{x^2} + r^2}{2r^2} = 2; \ \ x^4 + r^4 + r^2x^2 = 4\,r^2x^2;$$

$$x^4 - 3r^2x^2 + r^4 = 0\ ; \ \ \Delta = 9r^4 - 4r^4 = 5r^4 \ \ ; \ \ x^2 = \frac{3r^2 \pm r^2\sqrt{5}}{2} = \frac{r^2\left(3 \pm \sqrt{5}\right)}{2}$$

Quindi: $x^2 = \frac{r^2(3\pm\sqrt{5})}{2}$; $x = \pm\sqrt{\frac{r^2(3\pm\sqrt{5})}{2}}$, di cui è accettabile solo la soluzione positiva, essendo x la misura di un segmento. Quindi la soluzione è:

$$x = \sqrt{\frac{r^2\left(3 \pm \sqrt{5}\right)}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(3 \pm \sqrt{5}\right)}$$

Siccome $3 \pm \sqrt{5} > 0$, abbiamo due soluzioni. Dobbiamo calcolare due radicali doppi, ricordando la formula:

$\sqrt{\left(a \pm \sqrt{b}\right)} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$. Notiamo che $a^2 - b = 9 - 5 = 4$ è un quadrato perfetto:

$$\sqrt{\left(3 - \sqrt{5}\right)} = \sqrt{\frac{3+2}{2}} - \sqrt{\frac{3-2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$\sqrt{\left(3 + \sqrt{5}\right)} = \sqrt{\frac{3+2}{2}} + \sqrt{\frac{3-2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$$

Abbiamo quindi:

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left(3 \pm \sqrt{5}\right)} = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{5} \pm 1\right) = r\left(\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}\right)$$

Siccome $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0.62 \ \ e \ \ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 1.62$ quindi:

$x \cong 0.62\ r$ oppure $x \cong 1.62\ r$; tenendo conto della limitazione $r \le x \le 2r$ la soluzione accettabile è:

$x = r\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

Quindi: quando il tronco di cono è circoscrittibile alla sfera si ha:

$raggio\ base\ maggiore\ AK = x = r\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),$

$raggio\ base\ minore\ DH = \frac{r^2}{x} = \frac{r^2}{r\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}} =$

$= \frac{2r}{\sqrt{5}+1} = \frac{2r(\sqrt{5}-1)}{5-1} = r\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = DH$

Ricordiamo che $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\ r$ è la *sezione aurea di r:* quindi il tronco di cono avente volume doppio della sfera di raggio r è circoscrittibile alla sfera se il raggio della base minore è uguale alla sezione aurea del raggio della sfera.

b)

Generalizziamo la questione ponendo uguale a k il rapporto tra il volume del tronco di cono e quello della sfera; stabiliamo le condizioni di risolubilità del problema e illustriamo il caso $k = \frac{3}{2}$.

Ripetendo il ragionamento fatto precedente abbiamo:

$\frac{V(tronco)}{V(sfera)} = k;\ \frac{\frac{1}{3}\pi(AK^2 + DH^2 + AK \cdot DH)HK}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{(AK^2 + DH^2 + AK \cdot DH) \cdot 2r}{4r^3} =$

$= \frac{(AK^2+DH^2+AK \cdot DH)}{2r^2} = \frac{x^2+\frac{r^4}{x^2}+r^2}{2r^2} = k\ ; x^4 + r^4 + r^2x^2 = 2kr^2x^2$, da cui:

$x^4 + r^2(1-2k)x^2 + r^4 = 0;\ \Delta = r^4(1-2k)^2 - 4r^4 = r^4(4k^2 - 4k - 3) \geq 0$, da cui:

$4k^2 - 4k - 3 \geq 0, \qquad k \leq -\frac{1}{2}\ vel\ k \geq \frac{3}{2}.$

Quindi il tronco di cono avente volume k volte quello della sfera di raggio r è circoscrittibile alla sfera se $k \geq \frac{3}{2}$.

Nel caso particolare in $k = \frac{3}{2}$ avremo: $x^4 - 2r^2x^2 + r^4 = 0, (x^2 - r^2)^2 = 0, x^2 = r^2,$ $x = r:$

quando $k = \frac{3}{2}$ il tronco circoscrittibile diventa il cilindro che ha il raggio di base uguale a quello della sfera.

Con la collaborazione di Angela Santamaria