MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ, DELLA RICERCA
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2001/2002
Sessione Suppletiva
CORSO SPERIMENTALE
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti proposti nel questionario.

PROBLEMA 1.

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x,y) è assegnata la curva *G* di equazione:

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

a) Si disegni *G* e si consideri la retta *r* d'equazione $y = m$, $m>0$, indicando con *A* il punto di intersezione di *G* con *r* di ascissa più piccola. Si determini *m* in modo che risultino equivalenti le due regioni finite di piano di vertice comune il punto *A* e delimitate una, dall'asse y, da *G* e da *r*; l'altra da *G*, da *r* e dalla retta x=*1*;

b) si verifichi che il valore *m* trovato è *il valore medio* (o *media integrale*) *di f(x)* nell'intervallo [0, 1] e se ne dia una giustificazione geometrica;

c) si trovi l'equazione della curva G_1 corrispondente di *G* nella rotazione di 90° in senso antiorario e di centro l'origine del riferimento;

d) si determini l'area della parte finita di piano racchiusa fra *G*, G_1 e la retta di equazione $y=1$ nonché un'approssimazione di ciascuna delle due aree in cui tale regione risulta divisa dall'asse y.

PROBLEMA 2.

Le tre semirette complanari *r,s,t* hanno la stessa origine *O* e *s* è interna all'angolo delle altre due che è retto.

Su *r* e *t* sono presi, rispettivamente, due punti *A* e *B* tali che $OA=1$ e $OB = \sqrt{3}$ mentre con *A'* e *B'* si denotano le loro rispettive proiezioni su *s*.

Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche, si determini, al variare di *s*:

a) l'equazione cartesiana del luogo dei punti *P* medi di *A'B'*;

b) la posizione di *s* per cui il triangolo *BOP* ha area massima;

Successivamente, considerato il cono ottenuto dalla rotazione completa del triangolo di area massima, prima determinato, intorno alla retta BP se ne determinino il volume e l'angolo, in gradi sessagesimali, del settore circolare che ne costituisce lo sviluppo piano.

QUESTIONARIO.

1. Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono sei senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la sestina (17, 27, 37, 47, 67, 87)

2. Se $f(x) = x^3 - 8x + 10$ mostrare che esiste un valore *a* tale che $f(a)=p$ specificando altresì il significato e il valore di *p*.

3. Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt$

4. Esprimere in funzione dello spigolo *s* l'altezza di un tetraedro regolare.

5. Un'azienda, in un momento di crisi, abbassa gli stipendi di tutti i dipendenti del 7%. Superata la delicata fase, aumenta tutti gli stipendi del 7%. Come è dopo di ciò, la situazione dei dipendenti?

6. Studiare il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da due rette perpendicolari fissate nel piano non superi 1.

7. Posto $\int_1^x f(t)dt = x^2 - 2x + 1$, trovare $f(x)$;

8. Trovare i massimi e minimi relativi di $f(x) = x^x$, $x > 0$

9. La curva $(y+1)^3 = x^2$ passa per i punti (1, 0) e (-1, 0). Vale il teorema di Rolle nell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$?

10. Verificare che la funzione: $y = e^{-x} + x^{-1}$

è invertibile e detta *g* la funzione inversa, calcolare $g'(1+e^{-1})$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.