ORDINAMENTO 2002 - SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Se il polinomio $f(x)$ si divide per x^2-1 si ottiene x come quoziente e x come resto.

a)

Determinare $f(x)$.

Risulta:

$$f(x) = x(x^2-1) + x = x^3$$

b)

Studiare la funzione $y = \frac{f(x)}{x^2-1}$ e disegnarne il grafico G in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.

La funzione da studiare ha equazione:

$$y = \frac{f(x)}{x^2-1} = \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$$

N.B. Notiamo che la funzione è nella forma $y = mx + q + g(x)\ \ con\ g(x) \to 0\ \ se\ x \to \pm\infty$ possiamo quindi affermare che ammette l'asintoto obliquo di equazione $y = x$ (per la dimostrazione di questa proprietà si veda su matefilia la pagina http://www.matefilia.it/argomen/asintoti/asintoti.htm)

Studiamo la funzione nella forma

$$y = \frac{x^3}{x^2-1}$$

Dominio:

$x^2 - 1 \neq 0\,,\quad x \neq \pm 1:\ \ -\infty < x < -1\ \cup\ -1 < x < 1\ \cup\ 1 < x < +\infty$

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se x=0: y=0; se y=0: x=0.

Simmetrie notevoli:

$f(-x)=\frac{-x^3}{x^2-1}=-f(x)$: la funzione è dispari; il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

Segno della funzione:

$$y=\frac{x^3}{x^2-1}>0$$

N>0 se x>0
D>0 se $x^2-1>0\,,\ da\ cui\ \ x<-1\ \ vel\ \ x>1$
Quindi:
y>0 se $-1<x<0\ \ vel\ \ x>1$

Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

(abbiamo già evidenziato la presenza dell'asintoto obliquo).

$$\lim_{x\to 1^\pm}\frac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty=\lim_{x\to(-1)^\pm}\frac{x^3}{x^2-1}$$

Abbiamo gli asintoti verticali di equazioni $x=\pm 1$.

Derivata prima:

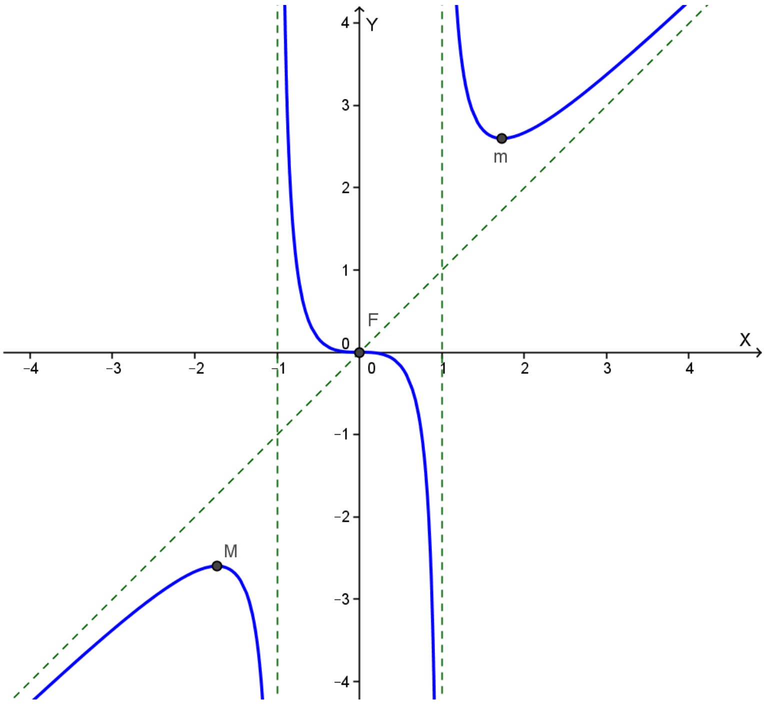
$$\mathrm{D}\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)=\frac{x^4-3x^2}{(\mathrm{x}^2-1)^2}\geq 0\ \ se\ \ \ x^4-3x^2\geq 0,\ \ x^2(x^2-3)\geq 0$$

La derivata prima si annulla per $x=0\ \ e\ \ x=\pm\sqrt{3}$, è positiva se $x<-\sqrt{3}\ \ vel\ \ x>\sqrt{3}$
Quindi la funzione è crescente se $x<-\sqrt{3}\ \ vel\ \ x>\sqrt{3}$ e decrescente altrove:
$x=0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale; $x=-\sqrt{3}$ è punto di massimo relativo, con ordinata $y(-\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $x=\sqrt{3}$ è punto di minimo relativo, con ordinata $y(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Derivata seconda:

$y''=\frac{2x^3+6x}{(\mathrm{x}^2-1)^3}\geq 0\ \ se\ \ \ \frac{2x(x^2+3)}{\mathrm{x}^2-1}\geq 0\ \ se\ \ \ \frac{x}{\mathrm{x}^2-1}\geq 0$: il segno della derivata seconda coincide con quello della funzione, quindi la concavità è verso l'alto dove la funzione è positiva ($-1 < x < 0 \quad vel \quad x > 1$), verso il basso altrove. In x=0, come già trovato con lo studio della derivata prima, abbiamo un flesso (di ordinata 0).

Il grafico della funzione è il seguente:



c)

Trovare l'equazione della retta t tangente a G nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.

La retta t ha equazione:

$y - y\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$; risulta:

$y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}-1} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{1}{6}$; $\qquad y'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right)_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{11}{9}$

Quindi:

t: $\quad y + \frac{1}{6} = -\frac{11}{9}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $\quad y = -\frac{11}{9}x + \frac{4}{9}$

d)

Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva G.

Dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{11}{9}x + \frac{4}{9} \\ y = \frac{x^3}{x^2-1} \end{cases} \quad ; \quad \frac{x^3}{x^2-1} = -\frac{11}{9}x + \frac{4}{9} \quad ; \quad 9x^3 = (x^2-1)(-11x+4);$$

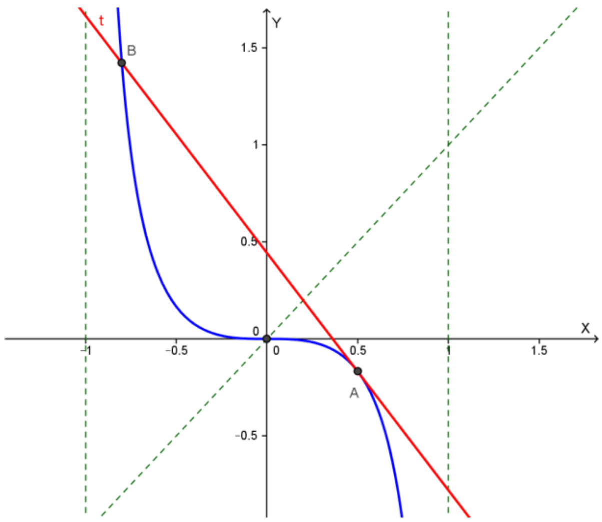
$$20x^3 - 4x^2 - 11x + 4 = 0$$

Tale equazione ha la soluzione doppia $x = \frac{1}{2}$, poiché t è tangente a G nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$.
Quindi possiamo abbassare di grado due volte l'equazione mediante la regola di Ruffini, ottenendo:

$$20x^3 - 4x^2 - 11x + 4 = (5x+4)(2x-1)^2$$

L'equazione quindi ha la soluzione doppia $x = \frac{1}{2}$ e la soluzione semplice $x = -\frac{4}{5}$. G e t ha quindi le seguenti intersezioni:

$$A: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases} \quad ; \quad B: \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = \frac{64}{45} \end{cases}$$



e)

Dopo aver determinato i numeri a, b tali che sussista l'identità:

$$\boldsymbol{\frac{x}{x^2-1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}}$$

calcolare una primitiva della funzione $\boldsymbol{y=\frac{f(x)}{x^2-1}}$.

Da $\frac{x}{x^2-1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}$ segue: $\frac{x}{x^2-1}=\frac{a(x-1)+b(x+1)}{x^2-1}$ $\quad da\ cui \quad x=x(a+b)-a+b$

e per il Principio di identità dei polinomi deve essere:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a+b=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} b=\dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi: $\frac{x}{x^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}$

$\frac{f(x)}{x^2-1}= x+\frac{x}{x^2-1}=x+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}$; cerchiamone una primitiva:

$$\int\frac{f(x)}{x^2-1}\,dx=\int\left(x+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}ln|x+1|+\frac{1}{2}ln|x-1|+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}ln|x^2-1|+C$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria