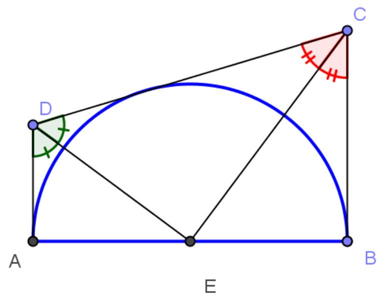
ORDINAMENTO 2002 - SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Una piramide di vertice V, avente per base il trapezio rettangolo ABCD, è tale che:
- ***il trapezio di base è circoscritto a un semicerchio avente come diametro il lato AB perpendicolare alle basi del trapezio;***
- ***lo spigolo VA è perpendicolare al piano di base della piramide;***
- ***la faccia VBC della piramide forma un angolo di 45° con il piano della base.***

a)

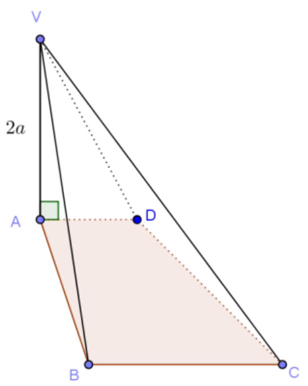
Indicato con E il punto medio del segmento AB, dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.



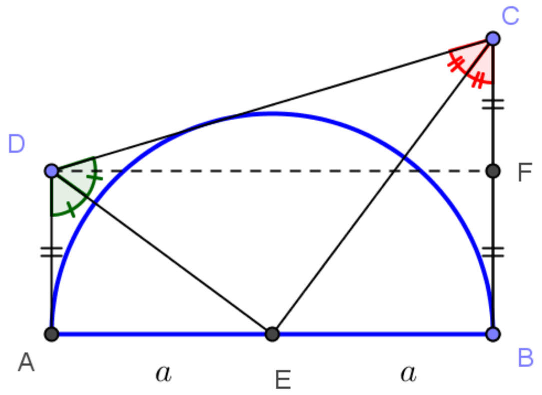
Essendo AD e AC tangenti alla circonferenza di diametro AB e centro E, per una nota proprietà della circonferenza gli angoli ADE e CDE sono congruenti; analogamente sono congruenti gli angoli BCE e DCE.
Essendo AD e BC parallele, gli angoli ADC e BCD (coniugati interni) sono supplementari, quindi le loro metà, CDE e DCE sono complementari: l'angolo CED del triangolo CDE è quindi retto. Il triangolo CED è quindi rettangolo in E.

b)

Sapendo che l'altezza della piramide è lunga 2a, dove a è una lunghezza assegnata, e che BC =2AD, calcolare l'area e il perimetro del trapezio ABCD.



Poiché la faccia VBC forma un angolo di 45° con il piano di base, essendo VA perpendicolare ad AB, l'angolo VBA del triangolo rettangolo AVB è di 45°, pertanto AB è uguale ad AV, cioè è lungo anch'esso 2a.



Essendo BC il doppio di AD, se mandiamo da D la parallela ad AB, questa incontra BC nel suo punto medio F. Per una nota proprietà delle tangenti ad una circonferenza da un punto esterno, risulta CD=AD+BC. Per il teorema di Pitagora risulta:

$CD^2 = DF^2 + CF^2$; $indicando\ con\ x\ AD\ si\ ha\ \ CD = AD + BC = 3x \quad quindi$:

$9x^2 = 4a^2 + x^2,\ \ 8x^2 = 4a^2\ ,\ \ x^2 = \frac{a^2}{2}\ \ ,\ \ x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, da cui:

$AD = x = \frac{\sqrt{2}}{2}a\ ,\ \ BC = 2x = \sqrt{2}\,a\ \ ,\ \ CD = 3x = \frac{3}{2}\sqrt{2}a$.

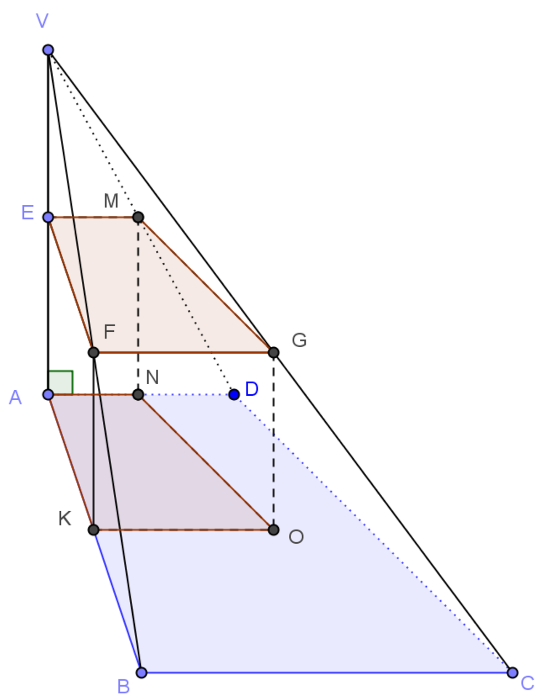
$Area(ABCD) = \frac{(AD+BC)AB}{2} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)2a}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a^2$

$2p(ABCD) = 2a + 6x = 2a + 3\sqrt{2}\,a\ \ = a(2 + 3\sqrt{2})$

c)

Determinare quindi l'altezza del prisma retto avente volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base ABCD della piramide.

Il prisma è rappresentato nella figura seguente:



Indichiamo con x l'altezza AE del prisma; notiamo che il rapporto tra le aree dei trapezi ABCD ed EFGM è direttamente proporzionale ai quadrati delle distanze dei loro priani (paralleli) dal vertice V:

$$Area(ABCD):Area(EFGM) = AV^2:EV^2\ ,\quad \frac{3\sqrt{2}}{2}a^2:Area(EFGM) = (2a)^2:(2a-x)^2$$

Quindi:

$$Area(EFGM) = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}a^2\cdot(2a-x)^2}{4a^2} = \frac{3\sqrt{2}\cdot(2a-x)^2}{8}$$

Il volume del prisma è dunque:

$$V = A(base)\cdot altezza = \frac{3\sqrt{2}\cdot(2a-x)^2}{8}\cdot x = \frac{3\sqrt{2}\cdot x(2a-x)^2}{8}\quad ,\quad 0 \le x \le 2a$$

Tale volume è massimo se lo è:

$y = x \cdot (2a - x)^2 = x^1 \cdot (2a - x)^2 \quad , \quad 0 \le x \le 2a$ (*)

Siccome y è il prodotto di due potenze la cui somma delle basi (x e 2a-x) è costante, risulta massima se le basi sono proporzionali agli esponenti, cioè se:
$\frac{x}{1} = \frac{2a - x}{2} \quad , \quad 2x = 2a - x \; , \; x = \frac{2}{3}a$

Pertanto il prisma di volume massimo è quello di altezza uguale a $\frac{2}{3}a$ (un terzo dell'altezza della piramide).

Allo stesso risultato si può arrivare studiando il segno della derivata prima della funzione (*).

d)

Stabilire se tale prisma ha anche la massima area laterale.

La superficie laterale del prisma ha area:

$S_l = 2p(base) \cdot altezza$

Il rapporto tra il perimetro della base della piramide $ABCD$ e quello della base del prisma $EFGM$ è uguale al rapporto tra le distanze dei loro piani dal vertice V, quindi:
$2p(ABCD) : 2p(EFGM) = VA : VE = 2a : (2a - x) \quad , \quad 2p(EFGM) = \frac{2p(ABCD) \cdot (2a - x)}{2a}$

$S_l = 2p(base) \cdot altezza = \frac{2p(ABCD) \cdot (2a - x)}{2a} \cdot x = \frac{a(2 + 3\sqrt{2}) \cdot (2a - x) \cdot x}{2a}$
che massima se lo è:

$z = (2a - x) \cdot x, \qquad 0 \le x \le 2a$

Anche in questo caso possiamo risolvere il problema elementarmente, poiché z è il prodotto di due quantità con somma costante: z è massima se le due quantità sono uguali, cioè se:

$2a - x = x \; , \; da\ cui \quad x = a$.

Il prisma di superficie laterale massima non è quello di volume massimo.

Con la collaborazione di Angela Santamaria