ORDINAMENTO 2002 - SESSIONE SUPPLETIVA – QUESTIONARIO

QUESITO 1

Si consideri la seguente equazione in x, y: $2x^2 + 2y^2 + x + y + k = 0$, *dove k è un parametro reale. La sua rappresentazione in un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali:*

a) È una circonferenza per ogni valore di k;
b) è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{2}$ *;*
c) è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{4}$ *;*
d) non è una circonferenza qualunque sia k.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e giustificare la risposta.

L'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta una circonferenza (reale) se:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0 \quad in\ particolare\ se\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 0 \quad la\ circonferenza\ ha\ raggio\ nullo.$$

L'equazione $2x^2 + 2y^2 + x + y + k = 0$ può essere vista nella forma:

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{k}{2} = 0$$

Essa rappresenta una circonferenza (reale) quando: $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{k}{2} \geq 0$, $\frac{1}{8} \geq \frac{k}{2}$, $k \leq \frac{1}{4}$

Ipotizzando che la richiesta faccia riferimento ad una circonferenza di raggio non nullo, la risposta corretta è la c).

QUESITO 2

Considerata la funzione di variabile reale: $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$, *dire se esiste il limite di f (x) per x tendente a 1 e giustificare la risposta.*

La funzione è definita solo se x=1, dove vale 0: non ha senso il limite per x che tende ad 1, poiché la definizione di limite per x che tende a c presuppone che c sia un punto di accumulazione per il dominio della funzione; nel nostro caso x=1 è un punto isolato.

QUESITO 3

Sia f (x) una funzione reale di variabile reale. Si sa che: f (x) è derivabile su tutto l'asse reale; f (x)=0 solo per x=0; $f(x) \to 0$ $per\ x \to \pm\infty$; f '(x)=0 soltanto per x=-2 e x=1; f(-2)=1 ed f(1)=-2. Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di f (x)?

Se la funzione è derivabile su tutto R allora è definita e continua su tutto R.

Siccome la funzione è sempre derivabile e gli unici punti a tangente orizzontale sono x=-2 e x=1, con f(-2)=1 ed f(1)=-2 , inoltre la funzione si annulla solo in x=0, possiamo concludere che $f(x) \to 0^+\ se\ x \to -\infty\ \ e\ che\ f(x) \to 0^-\ se\ x \to +\infty$ e quindi la funzione è positiva se x<0 e negativa se x>0; cresce se x<-2 vel x>1 , decresce se -2<x<1.
Per quanto riguarda i flessi possiamo affermare che esistono ALMENO TRE FLESSI: un flesso per x<-2, un secondo flesso per -2<x<1 ed un terzo flesso per x>1.

QUESITO 4

Sia f (x) una funzione di variabile reale definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} sen\ 2x & per \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1+a}{sen\ x} & per \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale non nullo. Stabilire se esiste un valore di a per il quale il dominio della funzione possa essere prolungato anche nel punto x=0.

Si tratta di stabilire se esiste un valore di a per il quale la funzione ha in x=0 una discontinuità eliminabile; questo avviene se il limite sinistro ed il limite destro della funzione per x che tende a zero esistono finiti e sono uguali.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+a}{sen\ x} = finito = 0 \quad solo\ se\ \ a = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{a} sen\ 2x = 0 \quad se\ \ a = -1$$

Quindi la funzione ha in x=0 una discontinuità eliminabile se a=-1; per tale valore di a il dominio della funzione può essere prolungato anche ne punto x=0.

Il prolungamento continuo della funzione è il seguente:

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & per \quad -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ -sen\ 2x & per \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

QUESITO 5

Un titolo di borsa ha perso ieri l'x % del suo valore. Oggi quel titolo, guadagnando l'y %, è ritornato al valore che aveva ieri prima della perdita. Esprimere y in funzione di x.

$$T = \ valore\ iniziale\ del\ titolo$$
$$T - \frac{x}{100}T = \left(\frac{100-x}{100}\right)T = \ valore\ del\ titolo\ dopo\ la\ perdita$$
$$\left(\frac{100-x}{100}\right)T + \frac{y}{100}\left[\left(\frac{100-x}{100}\right)T\right] = \ valore\ del\ titolo\ dopo\ il\ guadagno$$

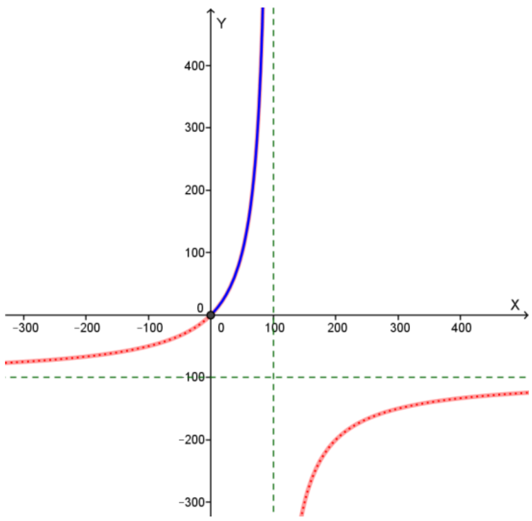
Dopo il guadagno il titolo è tornato al valore iniziale, quindi:

$$\left(\frac{100-x}{100}\right)T + \frac{y}{100}\left[\left(\frac{100-x}{100}\right)T\right] = T\,, \qquad \left(\frac{100-x}{100}\right) + \frac{y}{100}\left[\left(\frac{100-x}{100}\right)\right] = 1\,,$$

$$1 - \frac{x}{100} + \frac{y(100-x)}{10000} = 1\,, \quad x = \frac{y(100-x)}{100}\,,$$

$$y = \frac{100\,x}{100-x} \quad con \quad 0 < x \leq 100$$

(il grafico di tale funzione è una parte di funzione omografica):

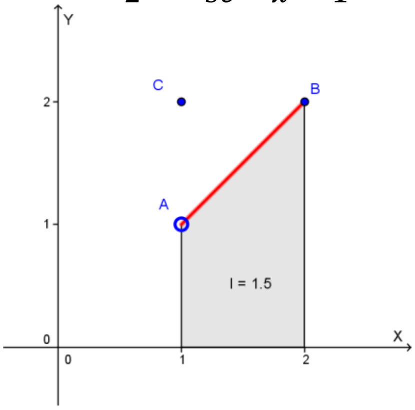


QUESITO 6

Come si sa, la condizione che la funzione reale di variabile reale f (x) sia continua in un intervallo chiuso e limitato [a; b] è sufficiente per concludere che f (x) è integrabile su [a; b]. Fornire due esempi, non concettualmente equivalenti, che dimostrino come la condizione non sia necessaria.

Dobbiamo fornire due esempi di funzione definita in un intervallo chiuso e limitato che sia integrabile ma non continua: questo dimostra che una funzione per essere integrabile non è necessario che sia continua.
Un primo semplice esempio è dato da una funzione continua in tutti i punti di un intervallo chiuso e limitato tranne che in punto, dove c'è una discontinuità eliminabile:

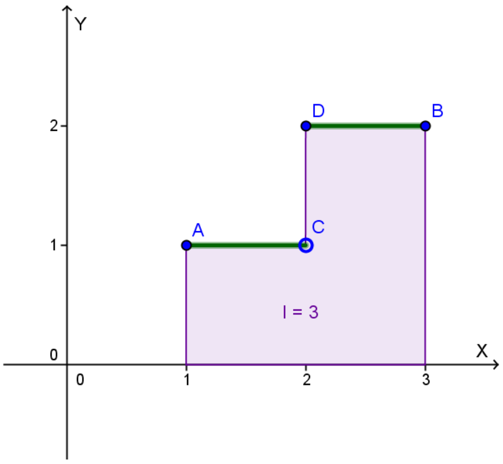
$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad 1 < x \leq 2 \\ 2 & se \quad x = 1 \end{cases}$$



La funzione è chiaramente integrabile nell'intervallo [1;2] e l'integrale vale 1.5, ma non è continua in tale intervallo (in x=1 abbiamo una discontinuità di terza specie).

Un secondo esempio è la funzione seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & se \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



La funzione è chiaramente integrabile nell'intervallo [1;3] e l'integrale vale 3, ma non è continua in tale intervallo (in x=2 abbiamo una discontinuità di prima specie).

QUESITO 7

Una primitiva della funzione $f(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+4}$ *è:*

$[A]\ \ ln\ \dfrac{x}{x+2}\ ;\qquad [B]\ \ ln\ \dfrac{x+2}{x}\ ;\qquad [C]\ \ ln\sqrt{x^2+2x}\,;\qquad [D]\ \ ln\sqrt{2x^2+x}\,.$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

Cerchiamo una primitiva della funzione data:

$$\int\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+4}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2}{2x+4}dx=\frac{1}{2}ln|x|+\frac{1}{2}ln|2x+4|+C=$$

$$=\frac{1}{2}ln|x|+\frac{1}{2}(ln2|x+2|)+C=\frac{1}{2}ln|x|+\frac{1}{2}ln2+\frac{1}{2}ln|x+2|+C=$$

$$=\frac{1}{2}ln|x|+\frac{1}{2}ln|x+2|+\left(\frac{1}{2}ln2+C\right)=ln\sqrt{|x(x+2)|}+K$$

Una primitiva di f(x), supponendo x>0, è quindi $\ln\sqrt{x^2+2x}$: la risposta corretta è la [C].

QUESITO 8

S_n *rappresenta la somma dei primi n numeri naturali dispari. La successione di termine generale* a_n *tale che* $a_n=\frac{S_n}{2n^2}$, è:

$[A]\ costante\ ;\quad [B]\ crescente\ ;\ [C]\ decrescente\ .$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

$S_n=1+3+\cdots+(2n-1),\ \ con\ \ n=1,2,\dots,n$

Si tratta della somma dei primi n termini di una progressione aritmetica di ragione 2 e primo termine 1, pertanto:

$$S_n=1+3+\cdots+(2n-1)=\frac{(s_1+s_n)\cdot n}{2}=\frac{\big(1+(2n-1)\big)\cdot n}{2}=n^2$$

(allo stesso risultato si può pervenire applicando il Principio di induzione matematica).

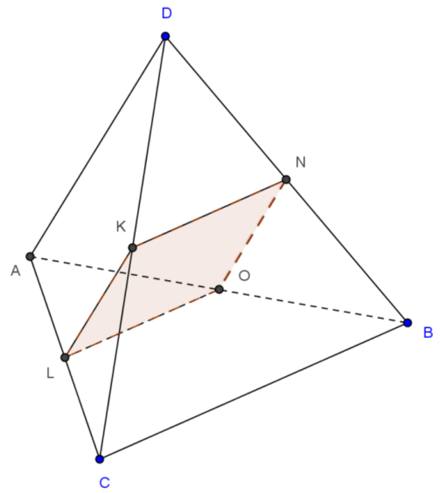
Abbiamo quindi:

$$a_n = \frac{S_n}{2n^2} = \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

La risposta esatta è quindi la [A].

QUESITO 9

Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.



Per una nota proprietà dei triangoli (*la congiungente i punti medi di due lati di un triangolo è parallela al terzo lato ed uguale alla sua metà*) KN ed LO son paralleli a BC ed uguali alla sua metà, quindi sono tra di loro uguali e paralleli; in modo analogo KL ed NO sono uguali alla meta di AD e ad esso paralleli; siccome gli spigoli del tetraedro sono tra di loro uguali, concludiamo che il quadrilatero richiesto KLON è un rombo (lati opposti paralleli e lati tutti uguali tra di loro).

Per dimostrare che il quadrilatero è un quadrato dimostriamo che le diagonali KO ed LN sono uguali.

Per l'evidente simmetria della figura, la distanza di K da O (cioè del punto medio di uno spigolo dal punto medio dello spigolo non complanare) è uguale alla distanza di N da L (K sta nella posizione di N come O sta nella posizione di L); concludiamo che le diagonali KO ed LN sono uguali, quindi il quadrilatero KLON (rombo) è un quadrato.

QUESITO 10

Di due rette a, b – assegnate nello spazio ordinario – si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari a una stessa retta p.

a) È possibile che le rette a, b siano parallele?
b) È possibile che le rette a, b siano ortogonali?
c) Le rette a, b sono comunque parallele?
d) Le rette a, b sono comunque ortogonali?

Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

a) Sì, a e b possono essere parallele, basta che a, b e p appartengano allo stesso piano.

b) Sì, per esempio a e b possono essere perpendicolari se incontrano p nello stesso punto: si immagini un sistema di assi cartesiani ortogonali x,y,z e si consideri a coincidente con l’asse x, b con l’asse z e p con l’asse y; in tal caso a e b sono perpendicolari nell’origine O degli assi cartesiani.

c) No, per esempio nel caso b) sono perpendicolari.

d) No, abbiamo visto nel caso a) che possono essere parallele.

Con la collaborazione di Angela Santamaria