PNI 2002 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) è assegnata la funzione:

$$y = \frac{a + b\ ln\ x}{x}$$

ove ln x denota il logaritmo naturale di x e a e b sono numeri reali non nulli.

a)

Si trovino i valori di a e b per i quali il grafico Γ della funzione passa per i punti (e^{-1}; 0) e (e^{2}; $3e^{-2}$).

Imponiamo il passaggio per i punti dati:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{a + b\ln(e^{-1})}{e^{-1}} \\ 3e^{-2} = \dfrac{a + b\ln(e^{2})}{e^{2}} \end{cases} \; ; \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{a - b}{e^{-1}} \\ 3e^{-2} = \dfrac{a + 2b}{e^{2}} \end{cases} \; ; \quad \begin{cases} a = b \\ 3 = a + 2b \end{cases} \; ; \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

La funzione richiesta ha quindi equazione: $y = \frac{1 + ln\ x}{x}$.

b)

Si studi e si disegni Γ.

$$y = \frac{1 + ln\ x}{x}$$

Dominio: x>0; $\mathbf{0 < x < +\infty}$ **;**

Intersezioni con gli assi

x=0: non ha senso;
y=0: $ln\ x = -1$, $x = e^{-1}$

Segno della funzione

La funzione è positiva se $1 + ln\ x > 0$, $x > e^{-1}$

Simmetrie notevoli

Visto il dominio, la funzione non può essere pari né dispari.

Limiti

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = -\infty$:   x=0 asintoto verticale.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$: y=0 asintoto orizzontale (quindi non può esserci asintoto obliquo).

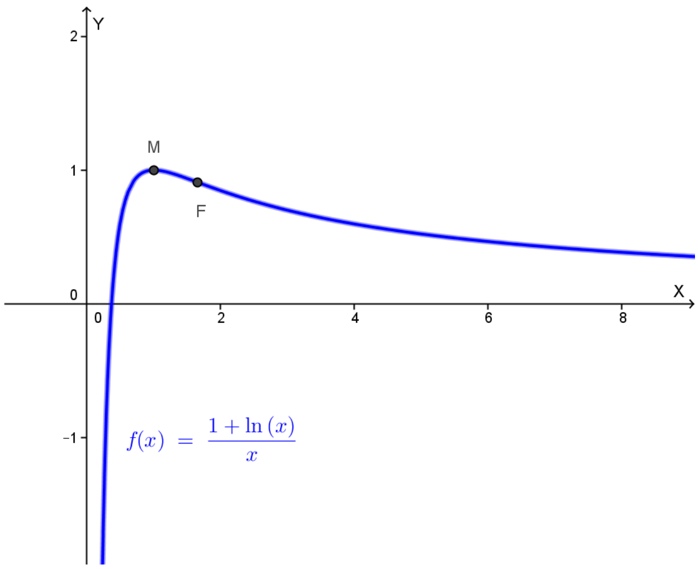
Derivata prima

$y' = -\frac{\ln(x)}{x^2} > 0$ se ln(x)<0,   0<x<1: in tale intervallo il grafico è crescente, per x>1 il grafico è decrescente: x=1 è punto di massimo relativo (e assoluto) ordinata y=1.

Derivata seconda

$y'' = \frac{2\ln(x)-1}{x^3} > 0\ se\ \ ln(x) > \frac{1}{2}$, $da\ cui\ \ x > e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$: in tale intervallo il grafico volge la concavità verso l'alto, per $0 < x < \sqrt{e}$ la concavità è rivolta verso il basso; $x = \sqrt{e}$ è un punto di flesso, con ordinata $y = \frac{1+\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt{e}} = \frac{3}{2\sqrt{e}}$: $flesso\ \ F = \left(\sqrt{e}; \frac{3}{2\sqrt{e}}\right)$

Il grafico della funzione è il seguente:



c)

Si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta y = y(1).

La retta richiesta ha equazione:

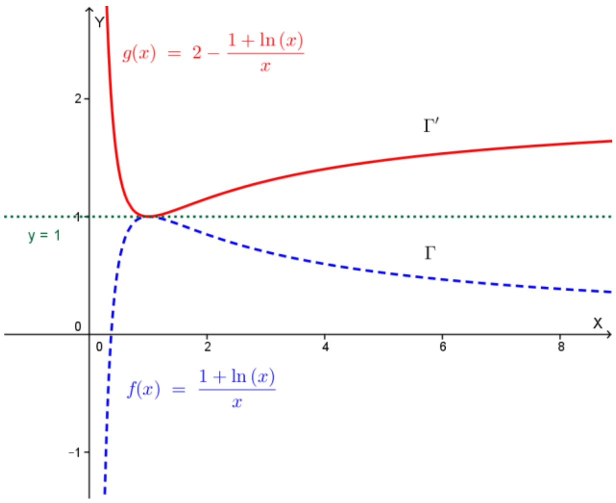
$y = y(1) = 1$

Le equazioni della simmetria rispetto alla retta di equazione y=b sono:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = 2b - y \end{cases} ; \quad \begin{cases} X = x \\ Y = 2 - y \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = X \\ y = 2 - Y \end{cases}$$

Quindi sostituendo nell'equazione di Γ otteniamo:

$$2 - Y = \frac{1 + \ln(X)}{X} \quad , \quad Y = 2 - \frac{1 + \ln(X)}{X} \quad , \quad Y = \frac{2X - 1 - \ln(X)}{X} \quad : \quad \Gamma'$$



d)

Si determini, con uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'area delimitata, per 1 ≤ x ≤ 2, da Γ e da Γ'.

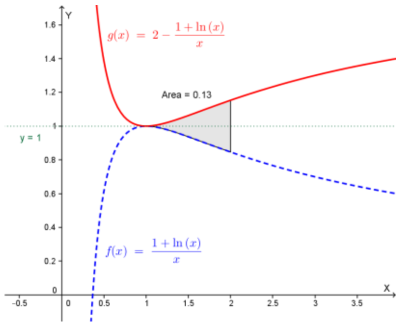
L'area richiesta (si veda la figura) si determina mediante il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 \left[\left(2 - \frac{1 + \ln(x)}{x} \right) - \left(\frac{1 + \ln(x)}{x} \right) \right] dx = \int_1^2 \frac{2x - 2 - 2\ln(x)}{x} \, dx = 2I$$

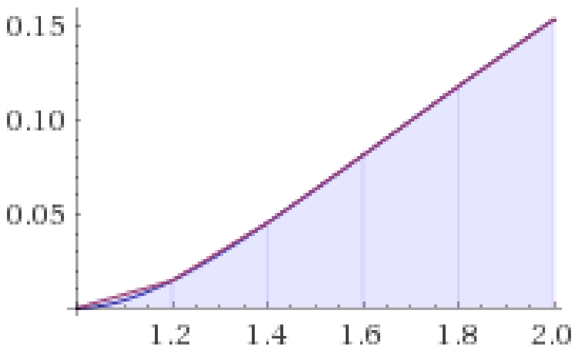
Avendo posto: $I = \int_1^2 f(x)\, dx$ con $f(x) = \frac{x-1-\ln(x)}{x}$

Applichiamo il metodo dei trapezi per calcolare un valore approssimato di I:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\right]$$



Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{x-1-\ln(x)}{x}$ e l'intervallo [1;2]; calcoliamo l'integrale $I = \int_1^2 f(x)\,dx$ utilizzando il **metodo dei trapezi**. Dividiamo l'intervallo in n=5 parti.



$$\int_1^2 \left(\frac{x-1-\ln(x)}{x}\right)dx \cong h\left[\frac{f(x_0)+f(x_5)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\right]$$

Dove: $h = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5} = 0.2 \quad x_0 = 1,\ x_1 = 1+h = 1.2,\ x_2 = 1.4,\ x_3 = 1.6,\ x_4 = 1.8,\ x_5 = 2$

$$I \cong 0.2\left[\frac{f(1)+f(2)}{2}+f(1.2)+f(1.4)+f(1.6)+g(1.8)\right] =$$

$$= 0.2\left[\frac{0+0.153}{2}+0.015+0.045+0.081+0.118\right] = 0.2\cdot 0.3355 \cong 0.0671$$

L'area richiesta è:

$2I \cong 2\cdot 0.0671 \cong 0.1342 \cong 0.13\ u^2$

N.B.

Una primitiva di $f(x) = \frac{x-1-\ln(x)}{x}$ è

$$\int \frac{x-1-\log(x)}{x}\,dx = x - \frac{1}{2}\log^2(x) - \log(x) + \text{constant}$$

Il valore esatto di $\int_1^2 \left(\frac{x-1-\ln(x)}{x}\right) dx$ è:

$$\int_1^2 \frac{x-1-\log(x)}{x}\,dx = 1 - \frac{\log^2(2)}{2} - \log(2) \approx 0.066626$$

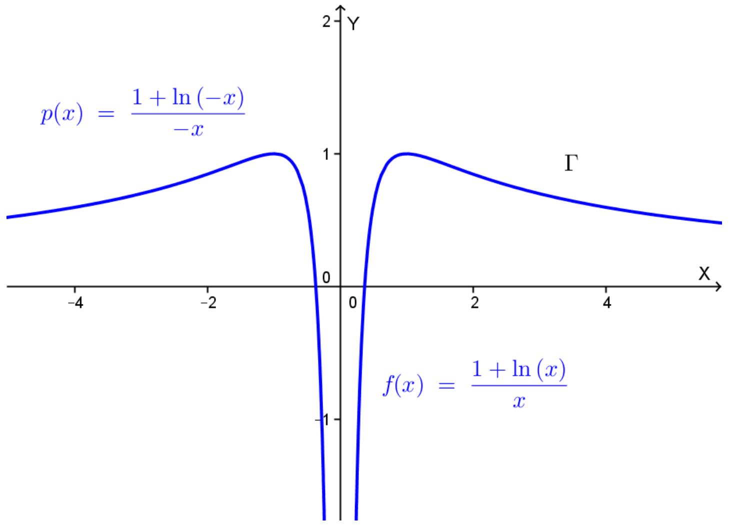
e)

Si disegnino, per i valori di a e b trovati, i grafici di:

$$\boldsymbol{y = \frac{a + b\,ln\,|x|}{|x|}} \quad , \quad \boldsymbol{y = \left|\frac{a + b\,ln\,x}{x}\right|}$$

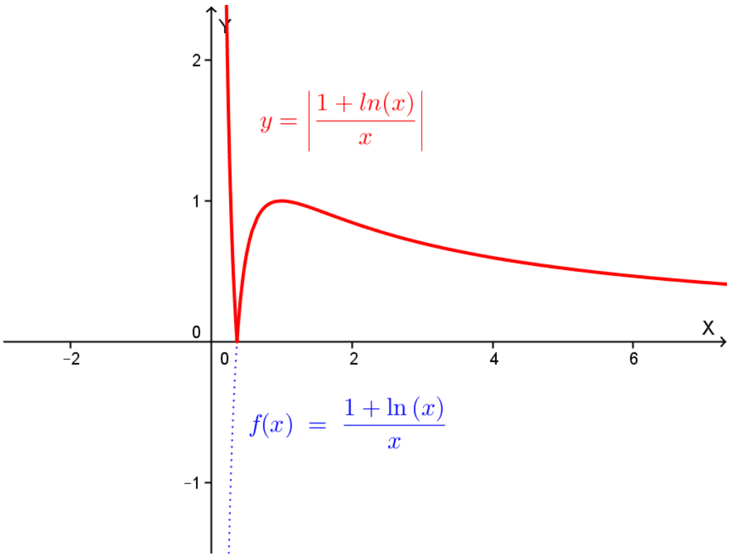
$$y = \frac{a + b\,ln\,|x|}{|x|} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1 + \,ln\,|x|}{|x|} = f(|x|)$$

Ricordiamo che il grafico di $y = f(|x|)$ si ottiene da quello di $y = f(x)$ confermando la parte a destra dell'asse y e ribaltandola a sinistra; quindi il grafico della funzione in oggetto è il seguente:



$$y = \left|\frac{a + b \ln x}{x}\right| \quad \Longrightarrow \quad y = \left|\frac{1 + \ln x}{x}\right|$$

Il grafico di $y = |f(x)|$ si ottiene da quello di $y = f(x)$ confermando la parte sopra l'asse x e ribaltando quella sotto l'asse x:



Con la collaborazione di Angela Santamaria