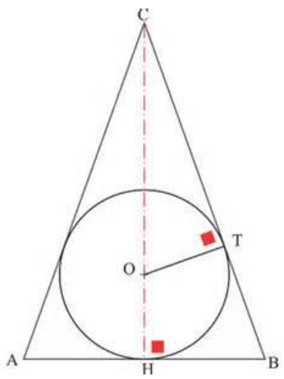
PNI 2002 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

È data la sfera S di centro O e raggio R. Determinare:

a)

il cono C di volume minimo circoscritto a S;



Poniamo l'altezza CH del cono uguale ad x: CH=x, con x>2R. Per la similitudine fra i triangoli HBC e TCO risulta:

CT:OT=CH:BH ; inoltre:

$CT = \sqrt{OC^2 - OT^2} = \sqrt{(x-R)^2 - R^\wedge 2} = \sqrt{x^2 - 2Rx}$

Pertanto:

$$\sqrt{x^2-2Rx}: R = x: BH \quad , \quad BH = \frac{Rx}{\sqrt{x^2-2Rx}} = \frac{R\sqrt{x^2-2Rx}}{x-2R}$$

Il volume del cono è pertanto:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot BH^2 \cdot CH = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x}{x-2R} \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x^2}{x-2R}, \quad con\ x > 2R$$

Tale volume è minimo se lo è:

$$y = \frac{x^2}{x-2R}$$

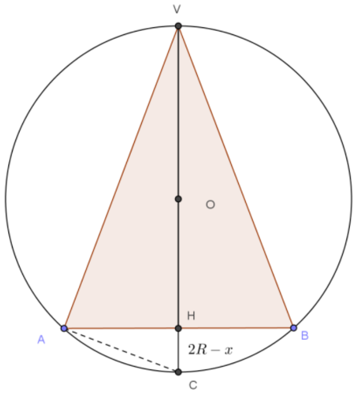
$$y' = \frac{x(x-4R)}{(x-2R)^2} \geq 0 \quad se \quad x \geq 4R$$

Quindi y è crescente se $x > 4R$ e decrescente se $0 < x < 4R$: $x = 4R$ è punto di minimo assoluto.

Il volume del cono circoscritto alla sfera di raggio R è minimo quando la sua altezza è uguale a 4R; il volume del cono vale in tal caso $\frac{8}{3}\pi R^3$.

b)

Il cono C' di volume massimo inscritto in S;



Indichiamo con x l’altezza del cono VH (in figura è rappresentata una sezione del cono inscritto nella sfera ottenuta con un piano passante per il vertice V del cono e per la retta della sua altezza VH). Risulta:

$$0 < x < 2R$$

Per il secondo teorema di Euclide si ha:

$$AH^2 = VH \cdot HC = x(2R - x)$$

Il volume del cono inscritto è quindi:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\, AH^2 \cdot VH = \frac{1}{3}\pi \cdot x(2R-x).x = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2(2R-x)$$

V è massimo se lo è: $y = x^2(2R-x) = (x)^2(2R-x)$

Trattandosi del prodotto di due potenze la cui somma delle basi è costante (x+2R-x=2R) esso è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$$\frac{x}{2} = \frac{2R-x}{1}\ ,\ \ 3x = 4R\ ,\ \ x = \frac{4}{3}R$$

Il cono inscritto di volume massimo è quello di altezza $\frac{4}{3}R$; il suo volume è:

$$V(\max) = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2(2R-x) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{16}{9}R^2\right)\cdot\frac{2}{3}R = \frac{32}{81}\pi R^3$$

c)

Un’approssimazione in litri della capacità complessiva di C e C', posto r =1 metro;

$$V(C) = \frac{8}{3}\pi R^3 = \left(\frac{8}{3}\pi\right)m^3 = \left(\frac{8}{3}\pi\right)\cdot 10^3\ dm^3 = \left(\frac{8}{3}\pi\right)\cdot 10^3\ litri\ \cong 8378\ \ litri$$

$$V(C') = \frac{32}{81}\pi R^3 = \frac{4}{27}V(C) \cong \frac{4}{27}(8378)\ \ litri \cong 1241\ litri$$

d)

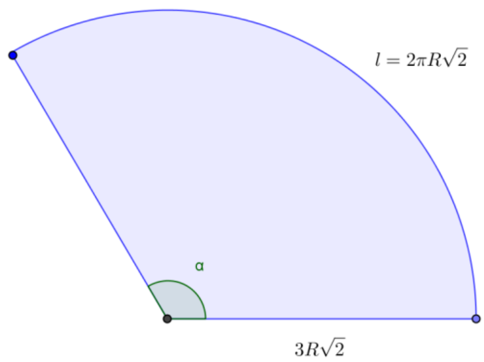
La misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono C;

Il cono C ha altezza $CH = x = 4R$ e raggio di base $BH = \frac{Rx}{\sqrt{x^2-2Rx}} = \frac{4R^2}{\sqrt{8R^2}} = \frac{4R^2}{2R\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$; l'apotema BC è quindi uguale a:

$$BC = \sqrt{CH^2 + BH^2} = \sqrt{16R^2 + 2R^2} = \sqrt{18R^2} = 3R\sqrt{2}$$

Il settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono ha quindi raggio $3R\sqrt{2}$ (corrispondente all'apotema del cono) e arco lungo quanto la circonferenza di base del cono, cioè $2\pi\, R\sqrt{2}$; l'ampiezza in radianti dell'angolo del settore circolare è data dal rapporto tra la lunghezza dell'arco ed il raggio, quindi:

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{2\pi\, R\sqrt{2}}{3R\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\pi\ ;\ \ quindi\ \ \ \alpha° = 120°.$$



e)

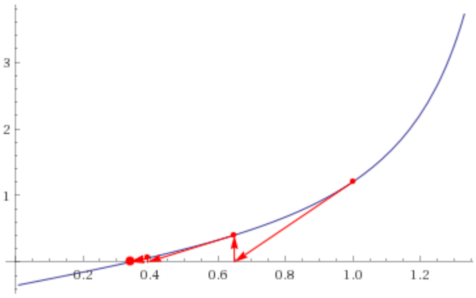
La misura approssimata, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C applicando uno dei metodi numerici studiati.

Detto β l'angolo di apertura BCH del cono C, risulta:

$$tg\ \beta = \frac{BH}{CH} = \frac{R\sqrt{2}}{4R} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Per trovare un valore approssimato dell'angolo β (in radianti) utilizziamo il metodo delle tangenti applicato alla risoluzione dell'equazione $tg\ x - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$; a tal fine consideriamo la funzione di equazione $y = f(x) = tg\ x - \frac{\sqrt{2}}{4}$. Isoliamo prima di tutto la radice:

$f(0) = -\frac{\sqrt{2}}{4} < 0$; $f(1) = tg\,1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \cong 1.2 > 0$; *quindi* la radice richiesta è interna all'intervallo $[0; 1]$. Essendo la funzione strettamente crescente (è una tangente traslata) la radice è unica. Notiamo che in tale intervallo la funzione è continua e derivabile ed ha derivata seconda positiva (la concavità della funzione è sempre verso l'alto). Considerando l'intervallo $[a; b] = [0; 1]$ ed osservando che $f(a) \cdot f''(x) < 0$, assumiamo come punto iniziale dell'iterazione $x_0 = b = 1$.



Abbiamo:

$f'(x) = 1 + tg^2 x$.

La formula iterativa di Newton è la seguente: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ equivalente a:

$$x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{tg\,x - \frac{\sqrt{2}}{4}}{1 + tg^2(x)}$$

Risulta:

$x_0 = 1$
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \cong 0.649$; $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \cong 0.392$; $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \cong 0.341$;
$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \cong 0.340$

Quindi β (in radianti), a meno di un centesimo, è 0.34; trasformiamolo in gradi sessagesimali:

$$\beta : \beta° = \pi : 180°,\ \ \beta° = \frac{\beta \cdot 180°}{\pi} = \frac{0.34 \cdot 180°}{\pi} \cong 19.481° = 19° + (0.481 \cdot 60)' = 19°29' = \beta°$$

N.B. Utilizzando una calcolatrice si ha $\beta° \cong 19.47122°$

Con la collaborazione di Angela Santamaria