SESSIONE SUPPLETIVA PNI – 2002 - QUESTIONARIO

QUESITO 1

Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna (7, 47, 67, 87).

La probabilità di avere uno dei quattro numeri alla prima estrazione è 4/90, quella di estrarre uno dei tre numeri rimanenti alla seconda estrazione è 3/89, quella di estrarre uno dei due numeri rimanenti alla terza estrazione è 2/88, ed infine la probabilità di estrarre l'ultimo dei quattro numeri alla quarta estrazione è 1/87. Quindi:

$$p(7,47,67,87) = \frac{4}{90}\cdot\frac{3}{89}\cdot\frac{2}{88}\cdot\frac{1}{87} = \frac{1}{2555190} \cong 3.91\cdot 10^{-7}$$

QUESITO 2

Calcolare la probabilità che in dieci lanci di una moneta non truccata dal quinto lancio in poi esca sempre testa.

Nei primi quattro lanci può uscire sia testa che croce, quindi la probabilità per ognuno dei primi quattro lanci è 1; dal quinto lancio al decimo la probabilità è ½, quindi la probabilità che dal quinto al decimo lancio esca sempre testa è data da:

$$p = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

QUESITO 3

Calcolare la derivata rispetto ad x *della funzione* $\int_x^b f(t)dt$, *ove f (x) è una funzione continua.*

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta:

$$\int_b^x f(t)dt = f(x)\,,\quad ma\quad \int_x^b f(t)dt = -\int_b^x f(t)dt$$

quindi:

$$\int_x^b f(t)dt = -f(x).$$

QUESITO 4

Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x sen\, t^3 dt}{x^4}$$

Applicando il teorema di de L'Hôpital (di cui sono soddisfatte le ipotesi, in quanto il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0, numeratore e denominatore sono funzioni continue e derivabili in un intorno di x=0 e la derivata del denominatore, $4x^3$, non si annulla in un intorno di x=0 privato dello zero), tenendo presente il teorema fondamentale del calcolo integrale ed il limite notevole senx/x per x che tende a zero si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{D\left(\int_0^x sen\, t^3 dt\right)}{D(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x^3}{4x^3} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x^3}{x^3} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Quindi anche il limite richiesto esiste ed è uguale ad $\frac{1}{4}$.

QUESITO 5

Utilizzando il teorema di Rolle provare che tra due radici reali di $e^x\, sen\, x = 1$ c'è almeno una radice reale di $e^x\, cos\, x = -1$.

Siano a e b due radici reali dell'equazione $e^x\, sen\, x - 1 = 0$. La funzione:

$$f(x) = e^x\, sen\, x - 1$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo chiuso e limitato [a;b], essendo continua in tale intervallo, derivabile nell'aperto (a;b) ed inoltre f(a)=f(b)=0.

Esiste quindi almeno un punto c interno all'intervallo [a;b] in cui la derivata della funzione f(x) si annulla. Ma risulta:

$f'(x) = e^x sen\, x + e^x \cos x$; ma $e^x\, sen\, x = 1$ quindi: $f'(x) = 1 + e^x \cos x$

Esiste quindi almeno un valore che annulla $1 + e^x \cos x$, cioè esiste almeno una radice reale dell'equazione $1 + e^x \cos x = 0$, *che equivale a* $e^x\, cos\, x = -1$.

QUESITO 6

Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo di estremi 1 e x, provare che:

$$1-\frac{1}{x}<\log x<x-1$$

e dare del risultato un'interpretazione grafica.

Consideriamo la funzione $f(x)=\log x\ \ (logaritmo\ naturale)$; essa è continua nell'intervallo chiuso e limitato [a;b]=[1;x] , per ogni x>1, e derivabile nell'aperto (1;x). Per il teorema di Lagrange esiste almeno un punto c interno all'intervallo [1;x] tale che:

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ ,\ \ con\ \ a<c<b$; quindi:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c),\quad \frac{\log x-0}{x-1}=f'(c),\quad con\quad 1<c<x\ .$$

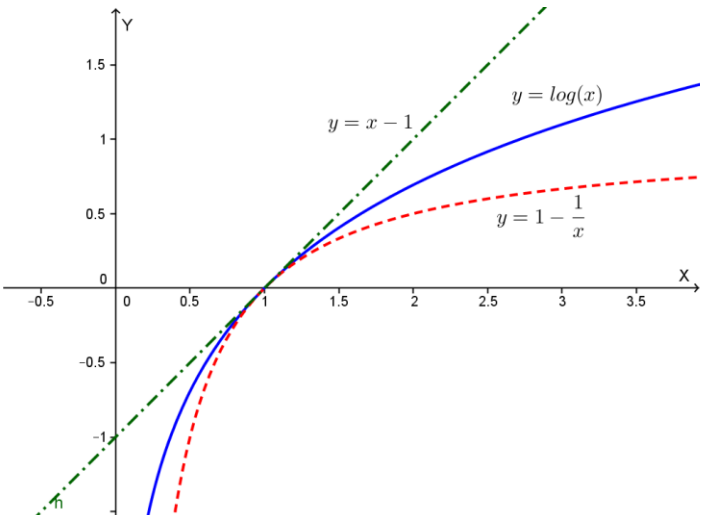
Essendo $f'(x)=\frac{1}{x}$ risulta $f'(c)=\frac{1}{c}$ e $1<c<x$ si ha: $\frac{1}{x}<\frac{1}{c}<1$, cioè:

$\frac{1}{x}<f'(c)<1$; da , $\frac{\log x}{x-1}=f'(c)$ segue quindi: $\frac{1}{x}<\frac{\log x}{x-1}<1$

Ma $x-1>0$ (poiché $x>1$) pertanto, moltiplicando i tre membri della disuguaglianza per $x-1$ si ha:

$$\frac{x-1}{x}<\log x<x-1\quad,\quad da\ cui:\qquad 1-\frac{1}{x}<\log x<x-1$$

Dal punto di vista grafico ciò equivale a dire che nell'intervallo aperto (1;x) il grafico della funzione $\mathrm{y}=\log\mathrm{x}$ è compreso tra i grafici delle funzioni $\mathrm{y}=1-\frac{1}{\mathrm{x}}$ e $\mathrm{y}=\mathrm{x}-1$:



QUESITO 7

Verificare che la funzione $y = f(x) = \frac{1-e^{1-x}}{1+e^{1-x}}$ *è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolare g'(0).*

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$f'(x) = \frac{2e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2} > 0 \ per\ ogni\ x$: la funzione è quindi sempre crescente perciò è

invertibile. In base al teorema sulla derivata della funzione inversa, detta g l'inversa di f risulta:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\ , \quad con \quad y_0 = f(x_0)$$

Sappiamo che $y_0 = 0$ quindi risulta: $\frac{1-e^{1-x}}{1+e^{1-x}} = 0\ ,\quad 1 - e^{1-x} = 0\ ,\ e^{1-x} = 1\ :\quad x_0 = 1$

Quindi:

$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{2}{4}} = 2$.

QUESITO 8

Con uno dei metodi di quadratura studiati, si valuti l'integrale definito

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\, dx$$

con un errore inferiore a 10^{-4}.

La funzione $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ è continua nell'intervallo [1;3] ed è derivabile almeno due volte nell'intervallo aperto (1;3):

$$f'(x) = \frac{-\ln(x) + 1}{x^2}\quad ,\quad f''(x) = \frac{2\ln(x) - 3}{x^3}$$

Detto M il massimo di $|f''(x)|$ nell'intervallo [1;3] , l'errore E_n che si commette approssimando l'integrale mediante la formula dei trapezi con n suddivisioni risulta:

$$E_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M$$

Nel nostro caso, nell'intervallo dato, risulta:

$$|f''(x)| = \left|\frac{2\ln(x) - 3}{x^3}\right|$$

che assume il valore massimo 3 per x =1; infatti nell'intervallo [1;3] per tale valore di x il numeratore è massimo ed il denominatore è minimo. Quindi:

$$E_n \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M = \frac{(3-1)^3}{12\, n^2} \cdot 3 = \frac{2}{n^2} \quad : \qquad E_n \leq \frac{2}{n^2}$$

Dobbiamo trovare n in modo che $E_n \leq 10^{-4}$.

$$\frac{2}{n^2} \leq \frac{1}{10^4} \quad se \quad n^2 \geq 2 \cdot 10^4 \quad , \quad n \geq 141.4$$

Quindi per avere un'approssimazione dell'integrale con un errore inferiore a 10^{-4} con il metodo dei trapezi occorre dividere l'intervallo [1;3] in almeno 142 parti !!!

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

$$\frac{b-a}{n} = \frac{2}{142} = \frac{1}{71}$$

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\, dx \cong \frac{2}{142}\left[\frac{f(1)+f(3)}{2} + f\left(1+\frac{1}{71}\right) + f\left(1+\frac{2}{71}\right) + \cdots + f(1+\frac{141}{71})\right]$$

Da questo calcolo (lunghissimo!) si ottiene (con l'aiuto di un computer!):

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\, dx \cong 0.603458$$

Notiamo che il valore esatto dell'integrale è:

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}[\ln^2 x]_1^3 = \frac{\ln^2 3}{2} \cong 0.603474 \ldots$$

Quindi il valore approssimato a meno di 10^{-4} è 0.6035.

Se si volesse utilizzare la formula delle parabole (Cavalieri-Simpson) avremmo come errore massimo:

$E_n \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot M$, dove M è il massimo del valore assoluto della derivata quarta della

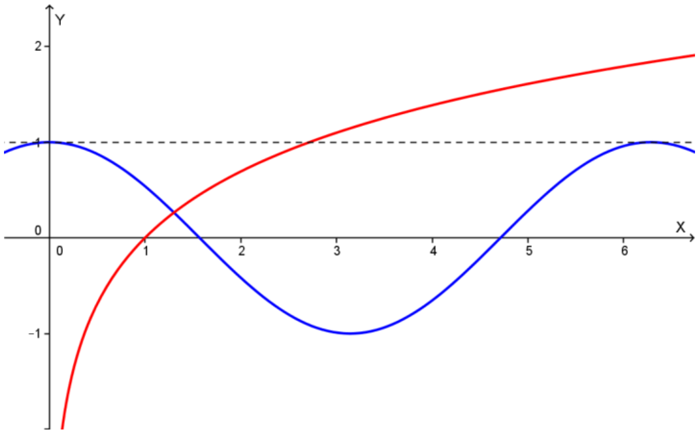
funzione. Il calcolo sarebbe un po' più semplice, ma sempre molto laborioso.

Una richiesta di errore inferiore a 10^{-2} sarebbe stata più che adeguata ad accertare le conoscenze richieste ed avrebbe portato a calcoli certamente più umani!

QUESITO 9

Verificato che l'equazione $\cos x - \log x = 0$ *ammette una sola radice positiva compresa tra 1 e 2 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.*

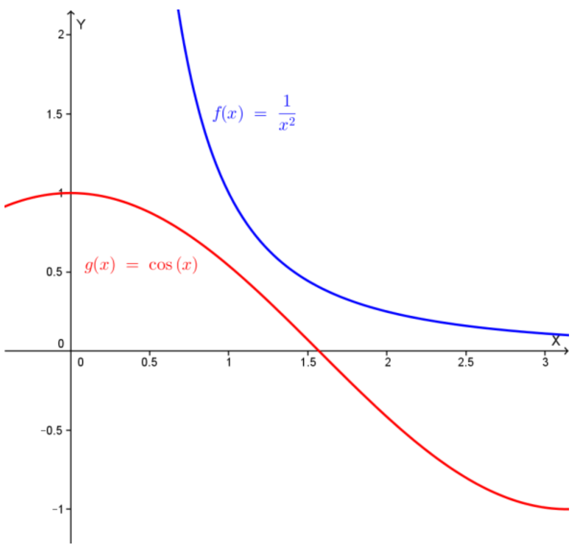
Rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento le funzioni $y = \cos(x)$ e $y = \ln(x)$



Si vede chiaramente che le due curve si incontrano una sola volta, per x compresa tra 1 e 2.

Per trovare un valore approssimato della radice utilizziamo il metodo delle tangenti; a tal fine consideriamo la funzione di equazione $y = f(x) = \cos(x) - \ln(x)$ e l'intervallo chiuso e limitato [a;b]=[1;2] . Risulta:

$f'(x) = -sen(x) - \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\cos(x) + \frac{1}{x^2} > 0$ se $\frac{1}{x^2} > \cos(x)$ sempre verificato nell'intervallo che ci interessa come si osserva dal grafico seguente:



Notiamo che nell'intervallo in esame la funzione è continua e derivabile ed ha derivata seconda positiva. Considerando l'intervallo $[a; b] = [1; 2]$ abbiamo:
$f(a) = f(1) = \cos(1) > 0$ quindi $f(a) \cdot f''(x) > 0$ e pertanto assumiamo come punto iniziale dell'iterazione $x_0 = a = 1$.

La formula iterativa di Newton è la seguente: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ equivalente a:

$$x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\cos(x) - \ln(x)}{-sen(x) - \frac{1}{x}}$$

Risulta:

$x_0 = 1$
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \cong 1.293$; $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \cong 1.303$; $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \cong 1.303$;

Quindi la soluzione approssimata dell'equazione è 1.303.

QUESITO 10

Chiarire, con esempi appropriati, la differenza in matematica tra «concetto primitivo » e «assioma» .

Un concetto primitivo è un ente che non viene definito e che viene assunto come concetto base per la costruzione di una teoria (per esempio il punto o la retta della geometria euclidea).

Un assioma (o postulato) è una proprietà che viene assunta come vera in una teoria, una proprietà che non viene cioè dimostrata (per esempio i quinto postulato di euclide, che assume l'unicità della parallela ad una retta data per un punto dato). A dire il vero il termine postulato è utilizzato in ambito geometrico, mentre il termine assioma è utilizzato per una teoria qualsiasi; per esempio Peano costruisce una teoria assiomatica dei numeri naturali, in cui un assioma è il seguente: zero è un numero naturale.

I concetti primitivi e gli assiomi sono le basi di ogni teoria deduttiva che si presenti come sistema assiomatico.

Con la collaborazione di Angela Santamaria