Seconda prova scritta
SESSIONE STRAORDINARIA

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2001/2002
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Con riferimento ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy):
scrivere l'equazione della circonferenza k con centro nel punto (8, 2) e raggio 6 e calcolare le coordinate dei punti M ed N in cui la bisettrice b del 1° e 3° quadrante interseca la curva;
scrivere l'equazione della parabola p avente l'asse parallelo all'asse delle ordinate, tangente all'asse delle ascisse in un punto del semipiano $x>0$ e passante per i punti M ed N;
calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola p e dalla bisettrice b;
dopo aver stabilito che la circonferenza k e la parabola p non hanno altri punti in comune oltre ad M ed N, calcolare le aree delle regioni in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla parabola.

PROBLEMA 2.

Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):
studiare le funzioni:

$$y = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3}, \quad y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}$$

e disegnare i loro grafici;
dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento OA un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse y, sia massima la lunghezza del segmento RS, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti;
determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S;
calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

QUESTIONARIO.

Sia D il dominio di una funzione reale di variabile reale f(x) e sia x_0 un elemento di D: definire la continuità e la discontinuità di f(x) in x_0 e fornire un'interpretazione geometrica delle definizioni date.

In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t ad essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse e indicate con M' ed N' rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N sulla retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo MNN'M', fornendo una esauriente dimostrazione.

Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.

In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata l'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$. Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a ed $\frac{1}{a}$, con $a \neq 0$, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

Dimostrare che la derivata della funzione $\log_\alpha x$ è la funzione $\frac{1}{x}\log_\alpha e$, dove e è la base dei logaritmi naturali.

Considerata l'equazione $x^2 + kx + k = 0$, calcolare il limite di ciascuna delle sue radici per $k \to +\infty$.

Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x + \frac{x}{|x|}\right) = -1, \quad \lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{x}{|x|}\right) = 1.$$

Dimostrare che le curve di equazione $y = x^2 + k x + k$, assegnate in un riferimento cartesiano, passano tutte per uno stesso punto.

Considerati i 90 numeri del gioco del Lotto, calcolare quante sono le cinquine che, in una data estrazione, realizzano un determinato terno.

Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle permutazioni semplici su k oggetti.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.