ORDINAMENTO 2002 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

a)

studiare le funzioni:

$$y = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3}\ , \qquad y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}$$

e disegnare i loro grafici.

Studiamo la prima funzione:

$$\boldsymbol{y = f(x) = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3} = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 = x^2\left(-\frac{2}{3}x + 2\right)}$$

Si tratta di una cubica, quindi è definita su tutto R.

La funzione non pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se x=0, y=0.
Se y=0, x=0 (doppia, quindi tangenza all'asse x e $-\frac{2}{3}x + 2 = 0\ \ da\ cui\ \ x = 3$.

Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{2}{3}x^3\right) = \mp\infty$ (non ci sono asintoti obliqui).

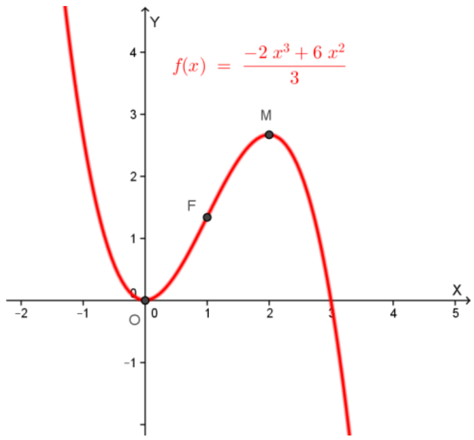
Derivata prima:

$f'(x) = -2x^2 + 4x \geq 0\ \ se\ \ x^2 - 2x \leq 0:\ \ 0 \leq x \leq 2$. La funzione è quindi crescente se

$0 < x < 2$ e decrescente se $x < 0\ \ vel\ \ x > 2:$ x=2 è punto di massimo relativo con valore $f(2) = -\frac{2}{3}\cdot 8 + 8 = \frac{8}{3}$; x=0 è punto di minimo relativo con valore y=0.

Derivata seconda:
$f''(x) = -4x + 4 \geq 0\ \ se\ \ x \leq 1$: concavità verso l'alto se x<1, verso il basso se x>1, flesso per x=2 con $y = f(1) = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$.

Il grafico della funzione è il seguente:



Studiamo la seconda funzione:

$$\boldsymbol{y = g(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3} = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x = x\left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4\right)}$$

Si tratta di una cubica, quindi è definita su tutto R.

La funzione non pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se x=0, y=0.
Se y=0, x=0 e $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0 \quad che\ non\ ha\ soluzioni\ (delta\ negativo)$

Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \pm\infty$ (non ci sono asintoti obliqui).

Derivata prima:

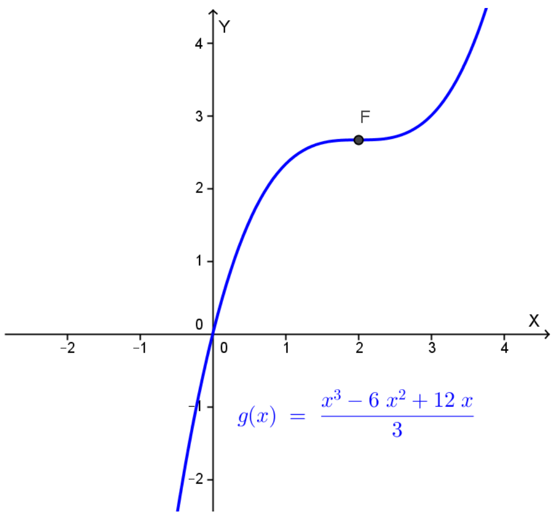
$g'(x) = x^2 - 4x + 4 \geq 0 \quad se \quad (x-2)^2 \geq 0: \quad per\ ogni\ x; in\ particolare\ g'(x) = 0\ se\ x = 0$

Quindi la funzione è sempre crescente ed ha in x=2 (ordinata $y = g(2) = \frac{8}{3} - 8 + 8 = \frac{8}{3}$) un flesso a tangente orizzontale.

Derivata seconda:

$g''(x) = 2x - 4 \geq 0 \quad se \quad x \geq 2$: concavità verso l'alto se x>2, verso il basso se x<2, flesso per x=2 con $y = g(2) = \frac{8}{3}$.

Il grafico della funzione è il seguente:



b)

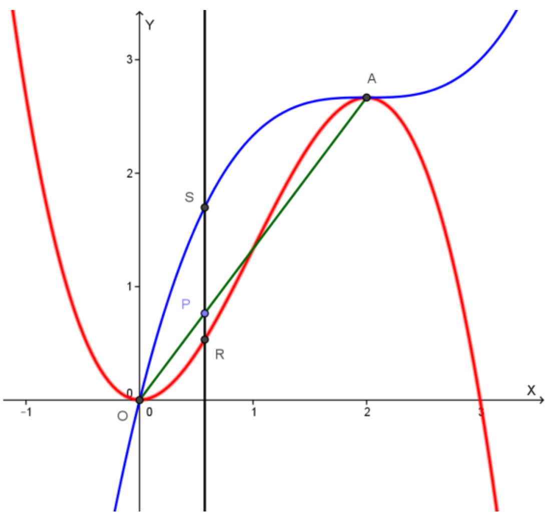
Dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento OA un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse y, sia massima la lunghezza del segmento RS, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti.

Cerchiamo le intersezioni fra le due curve:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \\ y = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \\ y = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \implies x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \implies x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

Quindi: x=0 e x=2 (doppia). Se x=0: y=0, se x=2: $y = \frac{8}{3}$. Quindi i due grafici, oltre al punto O hanno in comune il punto $A = \left(2; \frac{8}{3}\right)$.



$O=(0;0)$, $A=\left(2;\frac{8}{3}\right)$, retta OA: $y=\frac{4}{3}x$, $P=\left(t;\frac{4}{3}t\right)$, r: $x=t$, $con\ \ 0\le t\le 2$

$$R:\begin{cases} y=t \\ y=-\dfrac{2}{3}x^3+2x^2 \end{cases} \Rightarrow R=\left(t;-\frac{2}{3}t^3+2t^2\right)$$

$$S:\begin{cases} y=t \\ y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+4x \end{cases} \Rightarrow S=\left(t;\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t\right)$$

La lunghezza RS è quindi:

$z=y_S-y_R=\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t-\left(-\frac{2}{3}t^3+2t^2\right)=t^3-4t^2+4t$, $0\le t\le 2$

Dobbiamo determinare il massimo di z.

$z'=3t^2-8t+4\ge 0\ \ se\ \ \ t\le\frac{2}{3}\ \ vel\ \ t\ge 2$, quindi z è crescente se $0\le t<\frac{2}{3}$ e decrescente se $\frac{2}{3}<t<2$: z è massima se $t=\frac{2}{3}$.

Il punto P richiesto è quindi il punto della retta di equazione $y=\frac{4}{3}x$ con ascissa $\frac{2}{3}$: $P=\left(\frac{2}{3};\frac{8}{9}\right)$.

c)

Determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S.

Dobbiamo imporre che sia $f'(x)=g'(x)$, quindi:

$-2x^2+4x=x^2-4x+4$, $3x^2-8x+4=0$, $x=\dfrac{2}{3}$ e $x=2$.
Per $x=\frac{2}{3}$ troviamo R ed S e per $x=2$ troviamo A.

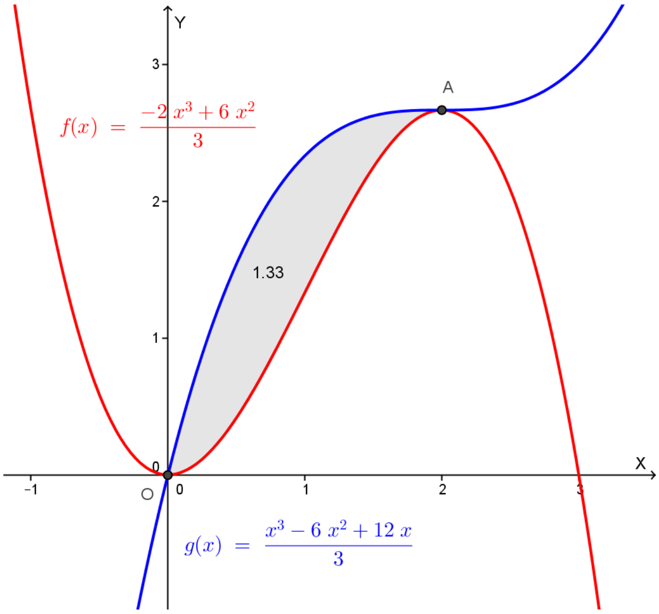
d)

Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area=\int_0^2[g(x)-f(x)]dx=\int_0^2\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x-\left(-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right)\right]dx=$$

$$= \int_0^2 [x^3 - 4x^2 + 4x]dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = 4 - \frac{32}{3} + 8 = \frac{4}{4}\, u^2 = Area$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria