ORDINAMENTO 2002 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Sia D il dominio di una funzione reale di variabile reale f (x) e sia x_0 un elemento di D: definire la continuità e la discontinuità di f(x) in x_0 e fornire un'interpretazione geometrica delle definizioni date.

La funzione di equazione y=f(x) si dice continua in un punto x_0 del dominio D se esiste, finito ed uguale ad $f(x_0)$ il limite per x che tende ad x_0 della funzione (fig.1)

La funzione si dice discontinua quando non è continua, quindi in uno dei seguenti casi:

a) Esistono finiti il limite destro e quello sinistro della funzione per x che tende ad x_0 ma tali limiti sono diversi (DISCONTINUITA' DI PRIMA SPECIE O CON SALTO); il valore assoluto della differenza fra i due limiti è detto "salto" (fig. 2).
b) Almeno uno dei due limiti (destro e sinistro) non esiste o è infinito (DISCONTINUITA' DI SECONDA SPECIE) (fig. 3).
c) Il limite destro ed il limite sinistro esistono, finiti e sono uguali; tale limite è però diverso da $f(x_0)$; tale tipo di discontinuità è detta ELIMINABILE O DI TERZA SPECIE (fig. 4). Il termine eliminabile deriva dal fatto che la funzione può essere "prolungata" ridefinendola nel punto x_0, ponendo $f(x_0)$ uguale al limite L:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \neq x_0 \\ L & se\ x = x_0 \end{cases}$$

Da notare che, con un abuso di linguaggio, si dice discontinua una funzione in un punto anche quando in quel punto non è definita.

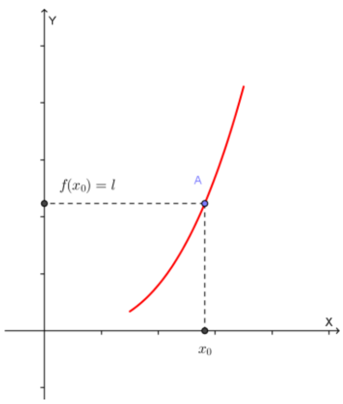


Fig. 1

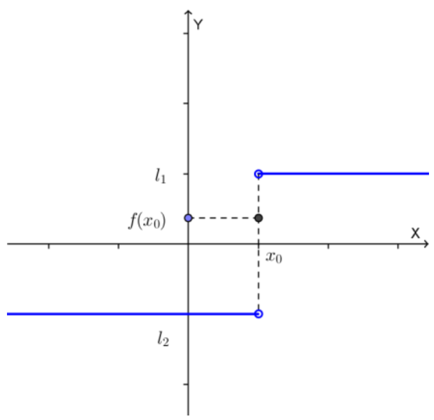


Fig. 2

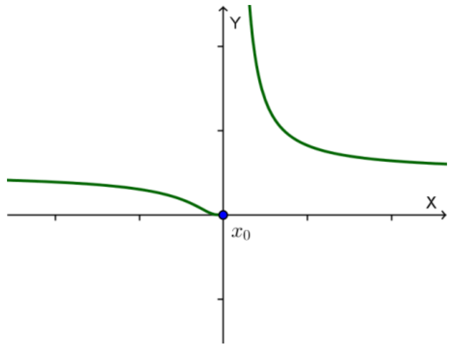


Fig. 3

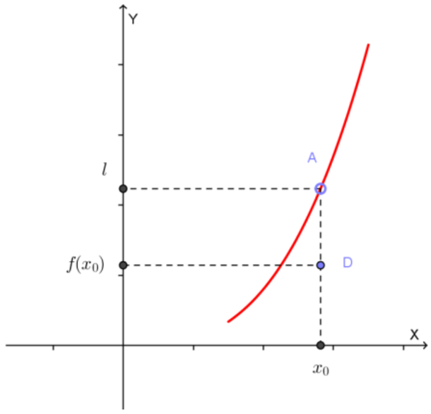
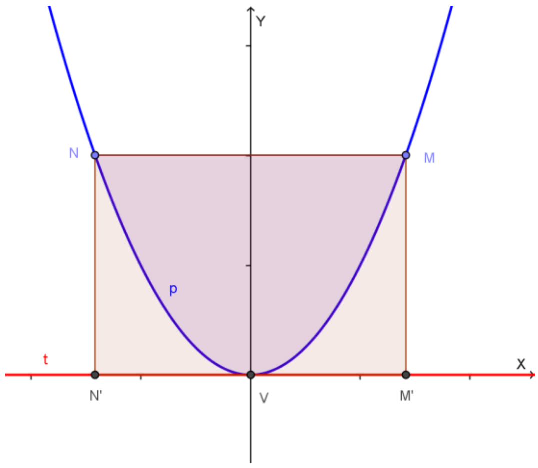


Fig. 4

QUESITO 2

In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t a essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse e indicate con M' ed N ' rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N sulla retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo MNN 'M', fornendo una esauriente dimostrazione.

Fissiamo il sistema di riferimento con l'origine nel vertice della parabola e asse delle ordinate l'asse della parabola. La tangente t sarà l'asse delle x. Rispetto a tale sistema di riferimento la parabola p ha equazione del tipo $y = ax^2$, con a>0 se fissiamo il verso positivo dell'asse y come in figura:



Posto $M = (k; ak^2), con\ k > 0$, risulta: $N = (-k; ak^2)$.
Il rettangolo MNN'M' ha area: $Area(MNN'M') = 2k \cdot ak^2 = 2ak^3$.
L'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN è l'area del segmento parabolico di base MN, quindi, per il teorema di Archimede, ha area S data da:
$S = \frac{2}{3} MN \cdot MM' = \frac{2}{3}(2k)(ak^2) = \frac{4}{3}ak^3$

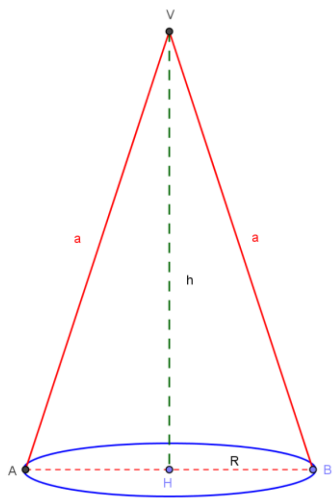
Il rapporto richiesto è quindi:

$$\frac{S}{Area(MNN'M')} = \frac{\frac{4}{3}ak^3}{2ak^3} = \frac{2}{3}$$

come previsto, tra l'altro, dal già citato teorema di Archimede.

QUESITO 3

Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.



Il perimetro 2p del triangolo è: $2p = 2a + 2R = costante$
Quindi: $a + R = p = costante$, $a = p - R$
Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h\,,\ \ h^2 = a^2 - R^2\ \ ,\ \ V = \frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{a^2 - R^2}$$

Tale volume è massimo se lo è:

$z = R^2\sqrt{a^2 - R^2}$ e z, essendo positiva, e massima se lo è

$$z^2 = y = R^4(a^2 - R^2) = R^4[(p - R)^2 - R^2] = R^4(p^2 - 2Rp);$$

risulta (ricordiamo che R e p sono positivi)

$$y' = 4R^3(p^2 - 2Rp) + R^4(-2p) = -10R^4p + 4R^3p^2 \geq 0\ \ se\ \ -5R + 2p \geq 0\,,\qquad R \leq \frac{2}{5}p$$

Quindi y è crescente se $0 < R < \frac{2}{5}p$ e decrescente se: $\frac{2}{5}p < R < a$

Pertanto il volume è massimo se $R = \frac{2}{5}p$. Per tale valore di R risulta:

$$a = p - R = p - \frac{2}{5}p = \frac{3}{5}p$$

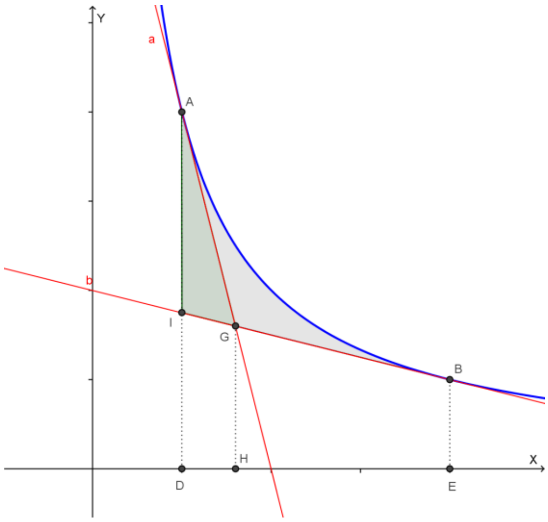
Pertanto quando il volume del cono è massimo fra il lato del triangolo a e la base 2R sussiste il seguente rapporto:

$$\frac{a}{2R} = \frac{\frac{3}{5}p}{2\cdot\frac{2}{5}p} = \frac{3}{4}\ .$$

QUESITO 4

In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata l'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$. Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a e $\frac{1}{a}$ con $a \neq 0$, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

Rappresentiamo graficamente la situazione (per comodità grafica scegliamo A e B nel primo quadrante e supponiamo 0<a<1; nel caso in cui A e B fossero nel terzo quadrante la regione avrebbe la stessa area):



L'area richiesta (regione AGB fra l'iperbole e le due tangenti) si ottiene come differenza tra l'area della regione ADEB compresa fra l'iperbole e l'asse x e l'area della regione AIG compresa fra la tangente in A e quella in B fra D ed H.

Determiniamo le equazioni delle due tangenti a (in A) e b (in B).
Essendo: $y' = -\frac{1}{x^2}$ i coefficienti angolari di a e b sono: $m(A) = -\frac{1}{a^2}$ *ed* $m(B) = -a^2$
Siccome $A = \left(a; \frac{1}{a}\right)$ *e* $B = \left(\frac{1}{a}; a\right)$ le equazioni delle tangenti sono:

$$a:\ \ y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$
$$b:\ \ y - a = -a^2\left(x - \frac{1}{a}\right) \quad \Longrightarrow \quad y = -a^2x + 2a$$

Cerchiamo l'intersezione G fra le due rette, dopo aver notato che, essendo A e B simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante (avendo ascissa e ordinata scambiate), G appartiene alla retta y=x; quindi per trovare G possiamo intersecare per esempio la retta b con y=x:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -a^2x + 2a \end{cases} \Longrightarrow \ x = -a^2x + 2a \ \Longrightarrow \ x = \frac{2a}{1+a^2} = x_G$$

L'area richiesta (se 0<a<1) è quindi:

$$Area = \int_{x_D}^{x_E} \left[\frac{1}{x} - (-a^2x + 2a)\right] dx - \int_{x_D}^{x_G} \left[-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} - (-a^2x + 2a)\right] =$$

$$= \left[\ln|x| + a^2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2ax\right]_a^{\frac{1}{a}} - \left[\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) \cdot \frac{x^2}{2} + \left(\frac{2}{a} - 2a\right)x\right]_a^{\frac{2a}{1+a^2}} =$$

$$= ln\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2} - 2 - \left(lna + \frac{a^4}{2} - 2a^2\right) -$$

$$-\left[\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{a} - 2a\right) \cdot \frac{2a}{1+a^2} - \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) \cdot \frac{a^2}{2} - \left(\frac{2}{a} - 2a\right)a\right] =$$

$$= -lna - \frac{3}{2} - lna - \frac{a^4}{2} + 2a^2 - \left[-\frac{a^4}{2} + 2a^2 + \frac{2-2a^2}{a^2+1} - \frac{3}{2}\right] =$$

$$= \left(-2lna + \frac{2-2a^2}{a^2+1}\right) u^2 = Area(se\ 0 < a < 1)$$

L'area richiesta quando a>1 è:

$$Area(se\ a > 1) = \left(2lna + \frac{2-2a^2}{a^2+1}\right) u^2$$

Osserviamo che se $a = \pm 1$ i punti A e B coincidono, quindi l'area richiesta è nulla.

QUESITO 5

Dimostrare che la derivata della funzione $log_a x$ *è la funzione* $\frac{1}{x} log_a e$ *, dove* e *è la base dei logaritmi naturali.*

Se è noto che la derivata della funzione lnx è la funzione $\frac{1}{x}$, applicando una proprietà dei logaritmi risulta:

$log_a x = \frac{lnx}{lna} = (\log_a e) lnx$, quindi: $D(log_a x) = D\big((\log_a e) lnx\big) = (\log_a e) \cdot \frac{1}{x}$, c.v.d.

Allo stesso risultato si può arrivare applicando la definizione di derivata:

$$D(log_a x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{log_a(x+h) - log_a x}{h} = \lim_{h \to o} \frac{log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} =$$

$$\lim_{h\to o}\frac{log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to o}\frac{log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}=(\log_a e)\cdot\frac{1}{x}$$

Si è applicato il limite notevole:

$$\lim_{f(h)\to o}\frac{log_a(1+f(h))}{f(h)}=(\log_a e)$$

QUESITO 6

Considerata l'equazione $x^2+kx+k=0$, *calcolare il limite di ciascuna delle sue radici per* $k\to+\infty$ *.*

Le radici dell'equazione sono:

$x_1=\frac{-k-\sqrt{k^2-4k}}{2}$, $x_1=\frac{-k+\sqrt{k^2-4k}}{2}$ con $k^2-4k\geq 0$, $quindi$: $k\leq 0$ vel $k>4$

Siccome dobbiamo calcolare i limiti per $k\to+\infty$ possiamo considerare k>4.

$$\lim_{k\to+\infty}x_1=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{-k-\sqrt{k^2-4k}}{2}\right)=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{-k-\sqrt{k^2-4k}}{2}\right)=-\infty=\lim_{k\to+\infty}x_1$$

$$\lim_{k\to+\infty}x_2=\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{-k+\sqrt{k^2-4k}}{2}\right)=[F.I.-\infty+\infty]$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{-k+\sqrt{k^2-4k}}{2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\frac{\left(-k+\sqrt{k^2-4k}\right)\cdot\left(-k-\sqrt{k^2-4k}\right)}{\left(-k-\sqrt{k^2-4k}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2-(k^2-4k)}{\left(-k-\sqrt{k^2-4k}\right)}=\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\frac{4k}{(-k-k)}=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1=\lim_{k\to+\infty}x_2$$

QUESITO 7

Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x\to0^-}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=-1\,,\quad\lim_{x\to0^+}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=1.$$

Definizione di limite destro in un punto: $\lim_{x\to c^+}f(x)=l$ se:

$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, I^+(c)\,/\ \ \forall x\in I^+(c)\cap D_f\,:\ |f(x)-l|<\varepsilon$

Definizione di limite sinistro in un punto: $\lim_{x \to c^-} f(x) = l \quad se$:

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, I^-(c) \,/\; \forall x \in I^-(c) \cap D_f \,:\, |f(x) - l| < \varepsilon$

(con I^+ abbiamo indicato un intorno destro e con I^- un intorno sinistro; con D_f abbiamo indicato il dominio della funzione).

Verifichiamo che: $\lim_{x \to 0^-} \left(x + \frac{x}{|x|}\right) = -1$ (possiamo considerare x<0).

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, I^-(0) \,/\; \forall x \in I^-(0) \cap D_f \,:\, |f(x) + 1| < \varepsilon$

$|f(x) + 1| < \varepsilon \;\; \Longrightarrow \;\; \left|x + \frac{x}{|x|} + 1\right| < \varepsilon \,,\;\; \left|x + \frac{x}{-x} + 1\right| < \varepsilon \,,\; |x| < \varepsilon$ da cui, tenendo conto che ci interessa x<0: $-x < \epsilon \,,\; x > -\epsilon$, quindi: $-\epsilon < \mathrm{x} < 0$, che è appunto un intorno sinistro di 0.

Verifichiamo che: $\lim_{x \to 0^+} \left(x + \frac{x}{|x|}\right) = 1$ (possiamo considerare x>0).

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, I^+(0) \,/\; \forall x \in I^+(0) \cap D_f \,:\, |f(x) - 1| < \varepsilon$

$|f(x) - 1| < \varepsilon \;\; \Longrightarrow \;\; \left|x + \frac{x}{|x|} - 1\right| < \varepsilon \,,\;\; \left|x + \frac{x}{x} - 1\right| < \varepsilon \,,\; |x| < \varepsilon$ da cui, tenendo conto che ci interessa x>0: $x < \epsilon$, quindi: $0 < x < \epsilon$, che è appunto un intorno destro di 0.

QUESITO 8

Dimostrare che le curve di equazione $y = x^2 + kx + k$, assegnate in un riferimento cartesiano, passano tutte per uno stesso punto.

Si tratta di un fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, che possiamo scrivere nella forma:

$y - x^2 - k(x + 1) = 0$

Intersecando le due generatrici $y - x^2 = 0 \;\; e \;\; x + 1 = 0$ troveremo gli eventuali punti base (punti comuni a tutte le curve del fascio):

$$\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \;\; \Longrightarrow \;\; \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Quindi tutte le curve passano per il punto $A = (-1; 1)$, che, come si può facilmente verificare, soddisfa l'equazione $y = x^2 + kx + k$ per ogni valore di k.

QUESITO 9

Considerati i 90 numeri del gioco del Lotto, calcolare quante sono le cinquine che, in una data estrazione, realizzano un determinato terno.

Fissata una terna, possiamo completare una cinquina combinando in tutti i modi possibili gli 87 numeri rimanenti a 2 a 2. Le cinquine richieste equivalgono quindi alle combinazioni (semplici) di 87 oggetti a 2 a 2, quindi:

$$C_{87,2} = \binom{87}{2} = \frac{87 \cdot 86}{2!} = 87 \cdot 43 = 3741.$$

QUESITO 10

Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle permutazioni semplici su k oggetti.

La formula richiesta è:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1}{k!}$$

Siccome una combinazione differisce da una disposizione per il fatto che non conta l'ordine degli oggetti, ad una combinazione di n oggetti a k a k corrispondo k! disposizioni; pertanto:

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k} \quad \Longrightarrow \quad C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{D_{n,k}}{P_k}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria