PNI 2002 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

a)

studiare le funzioni:

$$y = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3}\ , \qquad y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}$$

e disegnare i loro grafici.

Studiamo la prima funzione:

$$\boldsymbol{y = f(x) = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3} = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 = x^2\left(-\frac{2}{3}x + 2\right)}$$

Si tratta di una cubica, quindi è definita su tutto R.

La funzione non pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se x=0, y=0.
Se y=0, x=0 (doppia, quindi tangenza all'asse x e $-\frac{2}{3}x + 2 = 0\ \ da\ cui\ \ x = 3.$

Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{2}{3}x^3\right) = \mp\infty$ (non ci sono asintoti obliqui).

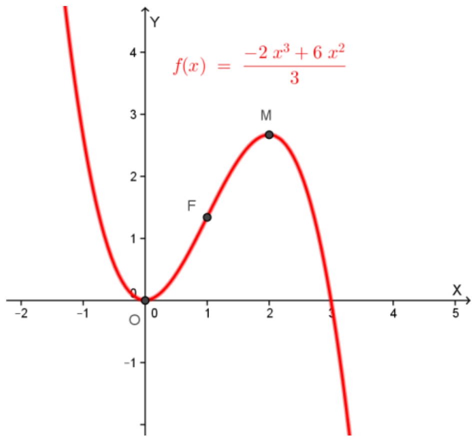
Derivata prima:

$f'(x) = -2x^2 + 4x \geq 0\ \ se\ \ x^2 - 2x \leq 0 :\ \ 0 \leq x \leq 2$. La funzione è quindi crescente se

$0 < x < 2$ e decrescente se $x < 0\ \ vel\ \ x > 2 :$ x=2 è punto di massimo relativo con valore $f(2) = -\frac{2}{3}\cdot 8 + 8 = \frac{8}{3}$; x=0 è punto di minimo relativo con valore y=0.

Derivata seconda:
$f''(x) = -4x + 4 \geq 0\ \ se\ \ x \leq 1$: concavità verso l'alto se x<1, verso il basso se x>1, flesso per x=2 con $y = f(1) = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$.

Il grafico della funzione è il seguente:



Studiamo la seconda funzione:

$$\boldsymbol{y = g(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3} = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x = x\left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4\right)}$$

Si tratta di una cubica, quindi è definita su tutto R.

La funzione non pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se x=0, y=0.
Se y=0, x=0 e $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0 \quad che\ non\ ha\ soluzioni\ (delta\ negativo)$

Limiti:

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \pm\infty$ (non ci sono asintoti obliqui).

Derivata prima:

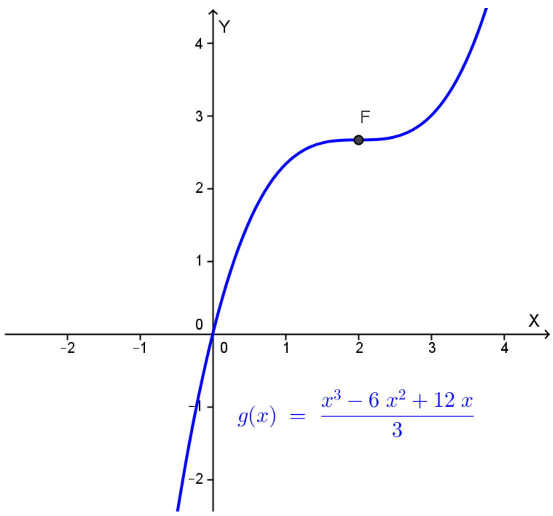
$g'(x) = x^2 - 4x + 4 \geq 0 \quad se \quad (x-2)^2 \geq 0: \quad per\ ogni\ x; in\ particolare\ g'(x) = 0\ se\ x = 0$

Quindi la funzione è sempre crescente ed ha in x=2 (ordinata $y = g(2) = \frac{8}{3} - 8 + 8 = \frac{8}{3}$) un flesso a tangente orizzontale.

Derivata seconda:

$g''(x) = 2x - 4 \geq 0 \quad se \quad x \geq 2$: concavità verso l'alto se x>2, verso il basso se x<2, flesso per x=2 con $y = g(2) = \frac{8}{3}$.

Il grafico della funzione è il seguente:



b)

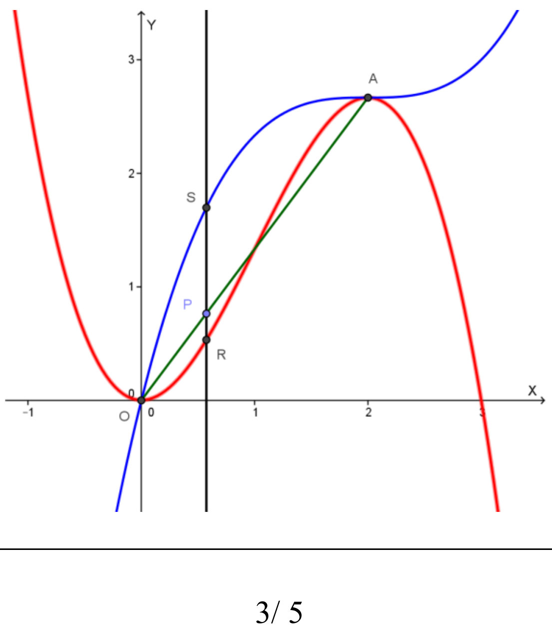
Dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento OA un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse y, sia massima la lunghezza del segmento RS, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti.

Cerchiamo le intersezioni fra le due curve:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \\ y = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \\ y = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \implies x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \implies x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

Quindi: x=0 e x=2 (doppia). Se x=0: y=0, se x=2: $y = \frac{8}{3}$. Quindi i due grafici, oltre al punto O hanno in comune il punto $A = \left(2; \frac{8}{3}\right)$.



$O=(0;0)$, $A=\left(2;\frac{8}{3}\right)$, retta OA: $y=\frac{4}{3}x$, $P=\left(t;\frac{4}{3}t\right)$, $r\colon\ x=t$, $con\ \ 0\le t\le 2$

$$R\colon\begin{cases} y=t \\ y=-\dfrac{2}{3}x^3+2x^2 \end{cases} \Longrightarrow \quad R=\left(t;-\frac{2}{3}t^3+2t^2\right)$$

$$S\colon\begin{cases} y=t \\ y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+4x \end{cases} \Longrightarrow \quad S=\left(t;\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t\right)$$

La lunghezza RS è quindi:

$z=y_S-y_R=\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t-\left(-\frac{2}{3}t^3+2t^2\right)=t^3-4t^2+4t$, $0\le t\le 2$

Dobbiamo determinare il massimo di z.

$z'=3t^2-8t+4\ge 0\ \ se\ \ \ t\le\frac{2}{3}\ \ vel\ \ t\ge 2$, quindi z è crescente se $0\le t<\frac{2}{3}$ e decrescente se $\frac{2}{3}<t<2$: z è massima se $t=\frac{2}{3}$.

Il punto P richiesto è quindi il punto della retta di equazione $y=\frac{4}{3}x$ con ascissa $\frac{2}{3}$:
$P=\left(\frac{2}{3};\frac{8}{9}\right)$.

c)

Determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S.

Dobbiamo imporre che sia $f'(x)=g'(x)$, quindi:

$-2x^2+4x=x^2-4x+4$, $3x^2-8x+4=0$, $x=\dfrac{2}{3}$ e $x=2$.
Per $x=\frac{2}{3}$ troviamo R ed S e per $x=2$ troviamo A.

d)

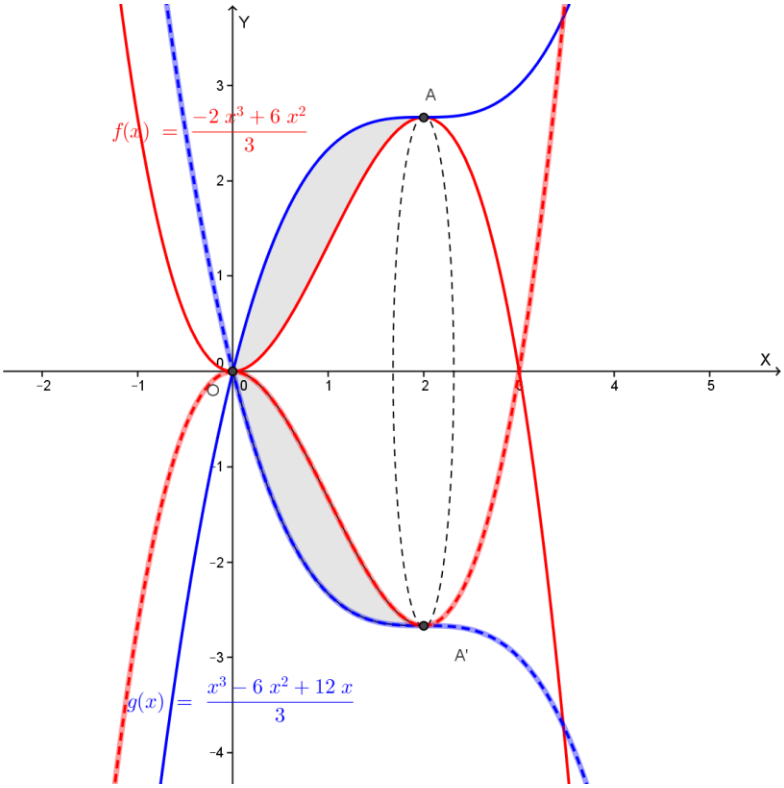
Calcolare il volume del solido generato dalla regione finita di piano delimitata dalle due curve quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

Il volume richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Volume=\pi\int_0^2[g^2(x)-f^2(x)]dx=\int_0^2\left[\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right)^2-\left(-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right)^2\right]dx=$$

$$= \pi \int_0^2 \left[-\frac{x^6}{3} + \frac{4x^5}{3} + \frac{8x^4}{3} - 16x^3 + 16x^2 \right] dx = \left[-\frac{1}{21}x^7 + \frac{2}{9}x^6 + \frac{8}{15}x^5 - 4x^4 + \frac{16}{3}x^3 \right]_0^2 =$$

$$= \pi \cdot \frac{1216}{315}\, u^3 \cong 12.128\, u^3 = Volume$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria