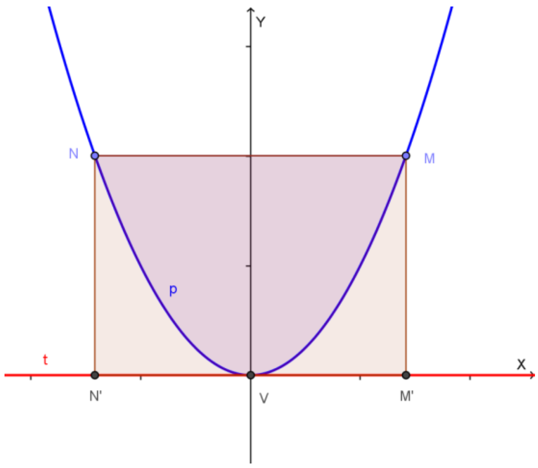
PNI 2002 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t a essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse e indicate con M' ed N ' rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N sulla retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo MNN 'M', fornendo una esauriente dimostrazione.

Fissiamo il sistema di riferimento con l'origine nel vertice della parabola e asse delle ordinate l'asse della parabola. La tangente t sarà l'asse delle x. Rispetto a tale sistema di riferimento la parabola p ha equazione del tipo $y = ax^2$, con a>0 se fissiamo il verso positivo dell'asse y come in figura:



Posto $M = (k; ak^2), con\ k > 0$, risulta: $N = (-k; ak^2)$.
Il rettangolo MNN'M' ha area: $Area(MNN'M') = 2k \cdot ak^2 = 2ak^3$.
L'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN è l'area del segmento parabolico di base MN, quindi, per il teorema di Archimede, ha area S data da:
$S = \frac{2}{3} MN \cdot MM' = \frac{2}{3}(2k)(ak^2) = \frac{4}{3}ak^3$

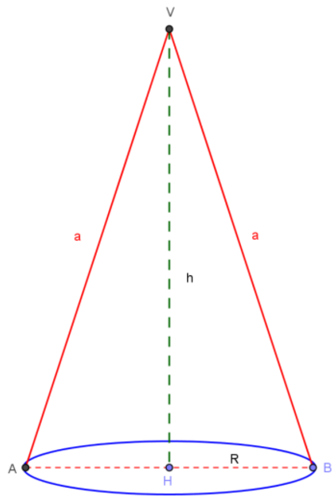
Il rapporto richiesto è quindi:

$$\frac{S}{Area(MNN'M')} = \frac{\frac{4}{3}ak^3}{2ak^3} = \frac{2}{3}$$

come previsto, tra l'altro, dal già citato teorema di Archimede.

QUESITO 2

Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.



Il perimetro 2p del triangolo è: $2p = 2a + 2R = costante$
Quindi: $a + R = p = costante$, $a = p - R$
Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h\,,\ \ h^2 = a^2 - R^2\ \ ,\ \ V = \frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{a^2 - R^2}$$

Tale volume è massimo se lo è:

$z = R^2\sqrt{a^2 - R^2}$ e z, essendo positiva, e massima se lo è

$$z^2 = y = R^4(a^2 - R^2) = R^4[(p - R)^2 - R^2] = R^4(p^2 - 2Rp);$$

risulta (ricordiamo che R e p sono positivi)

$$y' = 4R^3(p^2 - 2Rp) + R^4(-2p) = -10R^4p + 4R^3p^2 \geq 0\ \ se\ \ -5R + 2p \geq 0\,,\qquad R \leq \frac{2}{5}p$$

Quindi y è crescente se $0 < R < \frac{2}{5}p$ e decrescente se: $\frac{2}{5}p < R < a$

Pertanto il volume è massimo se $R = \frac{2}{5}p$. Per tale valore di R risulta:

$$a = p - R = p - \frac{2}{5}p = \frac{3}{5}p$$

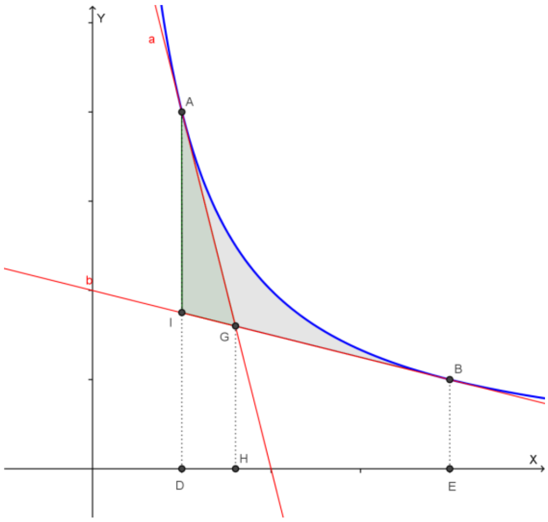
Pertanto quando il volume del cono è massimo fra il lato del triangolo a e la base 2R sussiste il seguente rapporto:

$$\frac{a}{2R} = \frac{\frac{3}{5}p}{2\cdot\frac{2}{5}p} = \frac{3}{4}\,.$$

QUESITO 3

In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata l'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$. Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a e $\frac{1}{a}$ con $a \neq 0$, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

Rappresentiamo graficamente la situazione (per comodità grafica scegliamo A e B nel primo quadrante e supponiamo 0<a<1; nel caso in cui A e B fossero nel terzo quadrante la regione avrebbe la stessa area):



L'area richiesta (regione AGB fra l'iperbole e le due tangenti) si ottiene come differenza tra l'area della regione ADEB compresa fra l'iperbole e l'asse x e l'area della regione AIG compresa fra la tangente in A e quella in B fra D ed H.

Determiniamo le equazioni delle due tangenti a (in A) e b (in B).
Essendo: $y' = -\frac{1}{x^2}$ i coefficienti angolari di a e b sono: $m(A) = -\frac{1}{a^2}$ ed $m(B) = -a^2$
Siccome $A = \left(a; \frac{1}{a}\right)$ e $B = \left(\frac{1}{a}; a\right)$ le equazioni delle tangenti sono:

$$a\colon\ y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x-a) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$
$$b\colon\ y - a = -a^2\left(x - \frac{1}{a}\right) \quad \Longrightarrow \quad y = -a^2x + 2a$$

Cerchiamo l'intersezione G fra le due rette, dopo aver notato che, essendo A e B simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante (avendo ascissa e ordinata scambiate), G appartiene alla retta y=x; quindi per trovare G possiamo intersecare per esempio la retta b con y=x:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -a^2x + 2a \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = -a^2x + 2a \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2a}{1+a^2} = x_G$$

L'area richiesta (se 0<a<1) è quindi:

$$Area = \int_{x_D}^{x_E} \left[\frac{1}{x} - (-a^2x + 2a)\right] dx - \int_{x_D}^{x_G} \left[-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} - (-a^2x + 2a)\right] =$$

$$= \left[\ln|x| + a^2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2ax\right]_a^{\frac{1}{a}} - \left[\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) \cdot \frac{x^2}{2} + \left(\frac{2}{a} - 2a\right) x\right]_a^{\frac{2a}{1+a^2}} =$$

$$= ln\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2} - 2 - \left(lna + \frac{a^4}{2} - 2a^2\right) -$$

$$-\left[\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{a} - 2a\right) \cdot \frac{2a}{1+a^2} - \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) \cdot \frac{a^2}{2} - \left(\frac{2}{a} - 2a\right) a\right] =$$

$$= -lna - \frac{3}{2} - lna - \frac{a^4}{2} + 2a^2 - \left[-\frac{a^4}{2} + 2a^2 + \frac{2-2a^2}{a^2+1} - \frac{3}{2}\right] =$$

$$= \left(-2lna + \frac{2-2a^2}{a^2+1}\right) u^2 = Area(se\ 0 < a < 1)$$

L'area richiesta quando a>1 è:

$$Area(se\ a > 1) = \left(2lna + \frac{2-2a^2}{a^2+1}\right) u^2$$

Osserviamo che se $a = \pm 1$ i punti A e B coincidono, quindi l'area richiesta è nulla.

QUESITO 4

Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x\to 0^-} \left(x + \frac{x}{|x|}\right) = -1\,, \quad \lim_{x\to 0^+} \left(x + \frac{x}{|x|}\right) = 1.$$

Definizione di limite destro in un punto: $\lim_{x\to c^+} f(x) = l \quad se$:

$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, I^+(c)\,/ \ \ \forall x \in I^+(c) \cap D_f \,:\, |f(x) - l| < \varepsilon$

Definizione di limite sinistro in un punto: $\lim_{x\to c^-} f(x) = l \quad se$:

$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, I^-(c)\,/ \ \ \forall x \in I^-(c) \cap D_f \,:\, |f(x) - l| < \varepsilon$

(con I^+ abbiamo indicato un intorno destro e con I^- un intorno sinistro; con D_f abbiamo indicato il dominio della funzione).

Verifichiamo che: $\lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=-1$ (possiamo considerare x<0).

$\forall\, \varepsilon>0\ \ \exists\, I^-(0)\,/\ \ \forall x\in I^-(0)\cap D_f:\ |f(x)+1|<\varepsilon$

$|f(x)+1|<\varepsilon\ \Longrightarrow\ \left|x+\frac{x}{|x|}+1\right|<\varepsilon\,,\ \left|x+\frac{x}{-x}+1\right|<\varepsilon\,,\ |x|<\varepsilon$ da cui, tenendo conto che ci interessa x<0: $-x<\epsilon\,,\ x>-\epsilon$, quindi: $-\epsilon<\mathrm{x}<0$, che è appunto un intorno sinistro di 0.

Verifichiamo che: $\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{x}{|x|}\right)=1$ (possiamo considerare x>0).

$\forall\, \varepsilon>0\ \ \exists\, I^+(0)\,/\ \ \forall x\in I^+(0)\cap D_f:\ |f(x)-1|<\varepsilon$

$|f(x)-1|<\varepsilon\ \Longrightarrow\ \left|x+\frac{x}{|x|}-1\right|<\varepsilon\,,\ \left|x+\frac{x}{x}-1\right|<\varepsilon\,,\ |x|<\varepsilon$ da cui, tenendo conto che ci interessa x>0: $x<\epsilon$, quindi: $0<x<\epsilon$, che è appunto un intorno destro di 0.

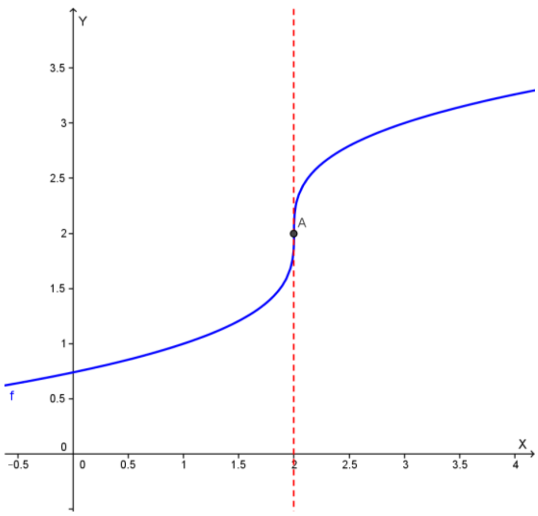
QUESITO 5

Considerata la funzione $f(x)=2+\sqrt[3]{x-2}$, *stabilire se è continua e derivabile nel punto x=2 e fornire un'interpretazione geometrica delle conclusioni.*

La funzione è definita e continua su tutto R.
Per stabilire se è derivabile in $x_0=2$ utilizziamo la definizione di derivata.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(2+\sqrt[3]{(2+h)-2}\right)-(2)}{h}=\lim_{h\to 0^{\pm}}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim_{h\to 0^{\pm}}\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}=+\infty$$

Quindi la funzione NON E' DERIVABILE in x=2, che è un punto di flesso a tangente verticale. La situazione geometrica è indicata nel seguente grafico:



QUESITO 6

Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle permutazioni semplici su k oggetti.

La formula richiesta è:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1}{k!}$$

Siccome una combinazione differisce da una disposizione per il fatto che non conta l'ordine degli oggetti, ad una combinazione di n oggetti a k a k corrispondo k! disposizioni; pertanto:

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k} \quad \Longrightarrow \quad C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{D_{n,k}}{P_k}$$

QUESITO 7

Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100. Determinare la probabilità che estraendo a caso una pallina, essa sia contrassegnata da un numero:
a) divisibile per 10 o per 8,
b) divisibile per 10 e per 8,
c) non divisibile per 10 né per 8.

I numeri da 1 a 100 divisibili per 10 sono 10 (10, 20, …, 100), quelli divisibili per 8 sono 12 (8, 18, 24, … , 80, 88, 96). Quelli divisibili sia per 10 sia per 8 sono quelli divisibili per 40 (mcm fra 10 ed 8), quindi sono 40 e 80 (cioè 2). Pertanto i numeri da 1 a 100 divisibili per 10 oppure per 8 sono 10+12-2=20.
La probabilità che una pallina estratta a caso sia contrassegnata da un numero divisibile per 10 oppure per 8 è quindi:

a) $p = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

In base a quanto detto sopra, la probabilità che il numero estratto sia divisibile per 10 e per 8 è:

b) $p = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

La probabilità che il numero non sia divisibile per 10 né per 8 è:

c) $p = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$

QUESITO 8

Con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare le coordinate del baricentro del triangolo in cui l'omotetia di centro (1; 2) e caratteristica 1/4 trasforma il triangolo di vertici (4; 0), (-4; 4), (0; 8).

L'omotetia ha equazioni:

$$\begin{cases} X - x_C = k(x - x_C) \\ Y - y_C = k(y - y_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X - 1 = \frac{1}{4}(x - 1) \\ Y - 2 = \frac{1}{4}(y - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \\ Y = \frac{1}{4}y + \frac{3}{2} \end{cases}$$

Il triangolo di vertici (4; 0), (-4; 4), (0; 8) ha baricentro G di coordinate:

$$x_G = \frac{4 - 4 + 0}{3} = 0, \qquad y_G = \frac{0 + 4 + 8}{3} = 4$$

Il baricentro G' del triangolo che ha come omotetico il triangolo coi vertici dati è l'immagine di G nell'omotetia indicata, quindi:

$$\begin{cases} X_{G'} = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \\ Y_G = \frac{1}{4}(4) + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{3}{4} \\ y_G = \frac{5}{2} \end{cases}$$

QUESITO 9

Tra le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$$

assegnate in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare quella che trasforma i punti di coordinate $\left(3;\ \sqrt{2}\right)$ *e* $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ *ordinatamente nei punti di coordinate* $\left(\frac{1}{3}; \frac{7\sqrt{2}}{3}\right)$ *e* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right)$.

$\left(3;\ \sqrt{2}\right) \rightarrow \left(\frac{1}{3}; \frac{7\sqrt{2}}{3}\right)$ e $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right) \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right)$ quindi:

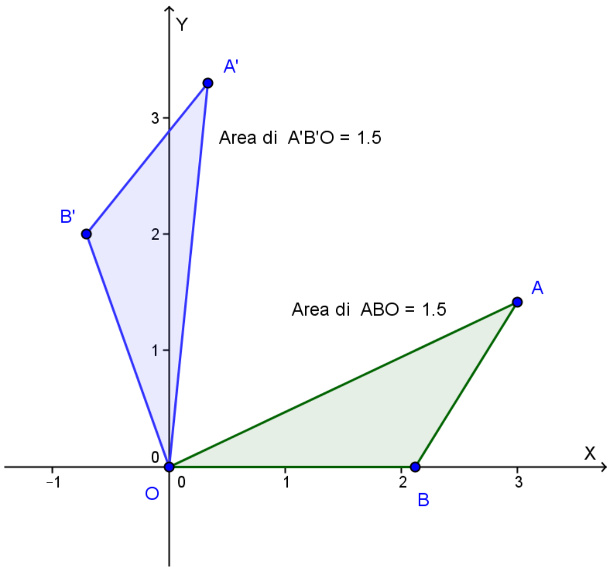
$$\begin{cases} \frac{1}{3} = 3a + b\sqrt{2} \\ \frac{7\sqrt{2}}{3} = 3c + d\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a \\ 2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = 3a + b\sqrt{2} \\ \frac{7\sqrt{2}}{3} = 3c + d\sqrt{2} \\ a = -\frac{1}{3} \\ c = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = -1 + b\sqrt{2} \\ \frac{7\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2} + d\sqrt{2} \\ a = -\frac{1}{3} \\ c = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \begin{cases} b = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ d = \frac{1}{3} \\ a = -\frac{1}{3} \\ c = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

Quindi l'affinità richiesta ha equazioni:

$$\begin{cases} X = -\frac{1}{3}x + \frac{2\sqrt{2}}{3}y \\ Y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{3}y \end{cases}$$

Questa affinità è una similitudine indiretta con centro (0; 0) e rapporto di similitudine

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{8}{9}} = 1$$



QUESITO 10

Scrivere un algoritmo che risolva il problema di determinare una radice approssimata di un'equazione con un'approssimazione voluta.

Indicata con f(x)=0 l'equazione, prima di tutto bisogna essere sicuri che la radice sia unica in un determinato intervallo [a; b]; mediante il teorema degli zeri possiamo essere sicuri che ci sia ALMENO una radice in un dato intervallo se la f(x) è continua nell’intervallo [a; b] e se i valori assunti da f(x) agli estremi dell’intervallo hanno segni discordi, cioè se $f(a) \cdot f(b) < 0$. Occorre poi procedere all’isolamento della radice (per via grafica o con lo studio della derivata prima della funzione). Supponiamo quindi di aver verificato che la radice esista e sia unica nell’intervallo [a; b].

I metodi più utilizzati per determinare un valore approssimato della radice dell’equazione sono quelli di Bisezione (o Dicotomia), delle Tangenti (o di Newton), delle Secanti (caso particolare di quello delle Tangenti) e del Punto fisso.

Indichiamo un algoritmo per determinare la radice dell’equazione f(x)=0 con una approssimazione *errore* voluta, supponendo f(x) continua nell’intervallo [a; b] e di aver verificato che la radice è unica nell’intervallo suddetto.

```
Algoritmo bisezione
      Leggi errore, a, b
      x1:=a
      x2:=b
      c:=(x1+x2)/2
      Se f(c)=0 allora scrivi “La radice è c” altrimenti ripeti
         Se f(c)*f(x1)<0 allora poni x2=c altrimenti poni x1=c
         Finchè (x2-x1)/2<eps oppure f(c)=0
      Scrivi c
Fine.
```

Indichiamo un possibile programma in Pascal (valido, a titolo di esempio, per la funzione X^3 - 4X^2 +4 = 0 e all’intervallo [1;2]). Tale programma è facilmente adattabile ad altra funzione e ad altro intervallo.

```
program bisezione;
Uses Crt;
Const    a=1;
         b=2;
Var      n:integer;
         c:real;
         risposta:char;
Procedure Presentazione;
Begin
  Writeln('Questo programma permette di calcolare la radice di ');
  writeln('X^3 - 4X^2 +4 = 0       nell''intervallo [1;2]');
  Writeln('a meno di 10 ^(-n) ');
  Writeln;writeln;
End;
Procedure  Dati;
Begin
 Write('n = ');
 Readln(n);
End;
Function  f(x:real):real;
```

```
Begin
  f:=x*x*x-4*x*x+4
End;
Procedure  Elabora;
Var   errore,x1,x2:real;
Begin
  errore:=exp(-n*ln(10));   (*10^(-n)*)
  x1:=a;        x2:=b;

  Repeat
    c:=(x1+x2)/2;
    If f(c)*f(x1)<0 then
    x2:=c  ELSE   x1:=c
  Until  (abs(x2-x1)<errore)  or (f(c)=0)
end;
Procedure Comunica;
 Begin
  Writeln('La radice , con l''approssimazione richiesta , : ',c:10:n);
  Writeln
 End;
BEGIN (*main*)
Repeat
 Clrscr;
 Presentazione;
 Dati;
 Elabora;
 Comunica;
 Write('Ancora? (s/n)  ');
 Readln(risposta);
Until risposta in ['n','N']
END.
```

Il programma può essere provato on line copiandolo nell'apposita finestra al seguente link*:*

[*http://www.tutorialspoint.com/compile_pascal_online.php*](http://www.tutorialspoint.com/compile_pascal_online.php)

Con la collaborazione di Angela Santamaria