ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a 2002/2003
Sessione Ordinaria
CORSO SPERIMENTALE
Tema di MATEMATICA

-

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti proposti nel questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t.
La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di ***versiera di Agnesi*** [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718-1799)].
Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$
$$OC : DP = DP : BC$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA;
Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$;
Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy, è dato il rettangolo $OABC$ con i vertici A e C di coordinate rispettive (2, 0) e (0, 1). Sia P un punto sul lato OA.
Si determini la posizione di P che massimizza l'angolo $C\hat{P}B$. Si calcoli tale valore massimo e lo si indichi con δ.
Si descrivano i luoghi geometrici Φ e Γ dei punti del piano che vedono il lato CB sotto angoli costanti di ampiezze rispettive δ e $\dfrac{\delta}{2}$
Si calcoli l'area della regione finita di piano racchiusa tra Φ e Γ.

QUESTIONARIO

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?
2. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?
3. Dare un esempio di polinomio P(x) il cui grafico tagli la retta y=2 quattro volte.
4. Dimostrare, usando il ***teorema di Rolle*** [da *Michel Rolle*, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione :

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_1 = 0$$

5. Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?
6. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 dx$.
7. Di una funzione f(x) si sa che ha derivata seconda uguale a $senx$ e che $f'(0) = 1$.

Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?

8. Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.
9. Dopo aver illustrato il significato di funzione periodica dare un esempio di funzione trigonometrica di periodo $\frac{2}{3}\pi$
10. Perché "geometria non euclidea"? Che cosa viene negato della geometria euclidea?

Durata massima della prova : 6 ore
E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.

Torna