

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

a.s. 2002/2003

Sessione Ordinaria

CORSO SPERIMENTALE

Tema di MATEMATICA

-

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti proposti nel questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A , una retta r passante per O , il punto B , ulteriore intersezione di r con γ , il punto C intersezione di r con t .

La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P . Al variare di r , P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, (1718-1799)].

Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA ;

Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy , l'equazione

cartesiana di Γ è:
$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2};$$

Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ .

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy , è dato il rettangolo $OABC$ con i vertici A e C di coordinate rispettive $(2, 0)$ e $(0, 1)$. Sia P un punto sul lato OA .

Si determini la posizione di P che massimizza l'angolo \widehat{CPB} . Si calcoli tale valore massimo e lo si indichi con δ .

Si descrivano i luoghi geometrici Φ e Γ dei punti del piano che vedono il lato CB sotto angoli costanti di ampiezze

rispettive δ e $\frac{\delta}{2}$

Si calcoli l'area della regione finita di piano racchiusa tra Φ e Γ .

QUESTIONARIO

1. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

2. Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.

Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?

3. Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm ?

4. Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y=2$ quattro volte.

5. Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b ?

6. Dare un esempio di solido il cui volume è dato da
$$\int_0^1 \pi x^3 dx$$
.

7. Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\sin x$ e che $f'(0) = 1$.

Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?

8. Dopo aver illustrato il significato di funzione periodica dare un esempio di funzione trigonometrica di periodo

9. Perché "geometria non euclidea"? Che cosa viene negato della geometria euclidea?

10. Dimostrare, usando il **teorema di Rolle** [da *Michel Rolle*, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione :

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 = 0$$

Durata massima della prova : 6 ore

E' consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.

Torna