

SCUOLE ITALIANE ALL'ESTERO
ESAMI DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione ordinaria 2003

Calendario australe

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 quesiti del questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche Oxy , studiate la curva F di equazione:

$$y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}.$$

- a) Tracciatene il grafico e denotate con s il suo asintoto obliquo.
- b) Indicate con A e B i punti in cui s incontra rispettivamente l'asse y e la curva Γ . Sul segmento \overline{AB} prendete un punto P in modo che, detto Q il punto di Γ avente la stessa ascissa di P , sia massima l'area del triangolo APQ .
- c) Determinate l'area della regione finita di piano delimitata da Γ e dalla bisettrice del primo e terzo quadrante.
- d) Determinate l'equazione della curva S simmetrica di Γ rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Problema 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy , siano: S il punto di coordinate $(0, 4)$; P un punto della retta r di equazione $2x - y - 2 = 0$; n la retta per S perpendicolare alla congiungente S con P ; Q il punto di intersezione di n con la retta s parallela per P all'asse y .

- a) Trovate l'equazione cartesiana del luogo Γ descritto da Q al variare di P su r .
- b) Studiate Γ , disegnatene il grafico e spiegate con considerazioni geometriche quanto si riscontra, analiticamente, per $x = 3$.
- c) Si calcoli l'area della regione di piano racchiusa tra Γ , il suo asintoto obliquo, l'asse y e la retta $x = 2$.
- d) Si trovi l'equazione del luogo K simmetrico di Γ rispetto alla retta $x = 2$.

Questionario

1. Quale è il dominio della funzione $f(x) = x^\pi - \pi^\pi$? Quale ne è il segno della derivata prima e quale quello della derivata seconda nel punto $x = \pi$?
2. Calcolate il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.
3. Dimostrate che

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

4. Dimostrate che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2.
5. I *gradi sessagesimali*, i *radiani* e i *gradi centesimali* sono le più comuni unità per la misura degli angoli. Date di ciascuna di esse una esauriente definizione.
6. Sia \widehat{APB} un angolo la cui misura in radianti è data dal numero e di Nepero, base dei logaritmi naturali. Quale è la misura in gradi sessagesimali di \widehat{APB} e quale quella in gradi centesimali? Motivate la vostra risposta.
7. Calcolate la derivata della funzione

$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}.$$

Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è una costante? Se sì, quale è la costante?

8. Verificate che la funzione: $y = e^{-x} + x^{-1}$ è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolate $g'(1 + e^{-1})$.