Scuole italiane all'estero (America latina) 2003 – PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche Oxy, studiate la curva F di equazione:

$$y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}$$

a)

Tracciatene il grafico e denotate con s il suo asintoto obliquo.

$$y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}$$

Trattandosi di una funzione razionale fratta, essa è definita e continua per tutti i valori che non annullano il denominatore: $x \neq \frac{1}{2}$.

La funzione non è pari né dispari e, poiché il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore, avremo un asintoto obliquo (quindi nessun asintoto orizzontale); avremo anche un asintoto verticale di equazione: $x = \frac{1}{2}$.

Se x=0, si ha y=0 e non ci sono altre intersezioni con gli assi cartesiani.

La funzione, nel dominio, è positiva se x>0.

Limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(2x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{4x^2} = \pm\infty \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x^3}{(2x-1)^2} = +\infty$$

Determiniamo l'equazione dell'asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(2x-1)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \ , \ q = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3}{(2x-1)^2} - \frac{1}{4}x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{4x^3 - x(2x-1)^2}{4(2x-1)^2}\right] =$$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{4x^2-x}{4(2x-1)^2}\right] = \frac{1}{4}$: asintoto obliquo $s: y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

Studio monotonia

$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(2x-1)^3} = 0 \ \ se \ \ x = 0 \ \ e \ x = \frac{3}{2}$ (punti a tangente orizzontale). Si ha poi:

$f'(x) \geq 0 \;\; se \;\; x < \dfrac{1}{2}\,, \quad x \geq \dfrac{3}{2}\,, \qquad x = 0$

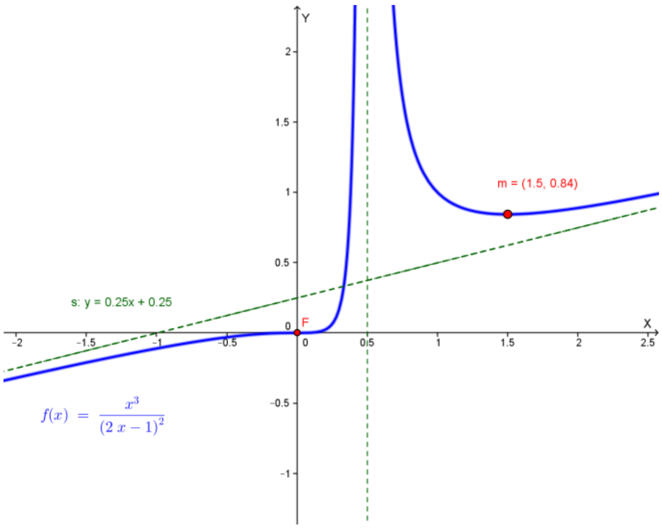
La funzione è quindi crescente per $x < \frac{1}{2} \;\; e \;\; x > \frac{3}{2}$. In x=0 abbiamo un flesso a tangente orizzontale ed in x=3/2 un minimo relativo (ordinata 27/32).

Studio concavità

$$f''(x) = \frac{6x}{(2x-1)^4} \geq 0 \;\; se \; x \geq 0 \; (nel \; dominio)$$

Il grafico quindi volge la concavità verso l'alto se $x > 0 \;\; (nel \; dominio)$ e verso il basso per $x < 0$. Nell'origine abbiamo un flesso (a tangente orizzontale come già detto).

Grafico



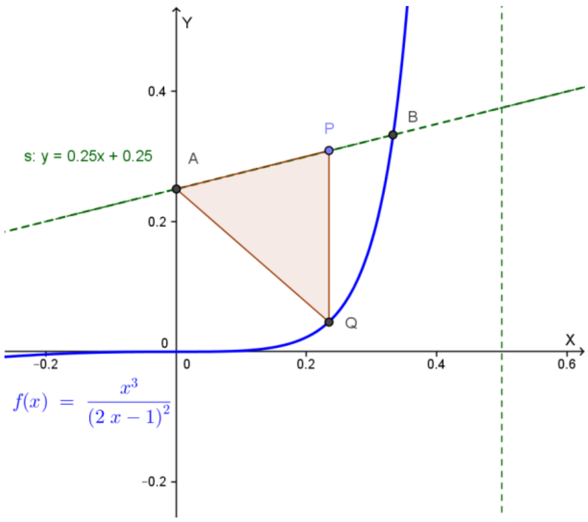
b)

Indicate con A e B i punti in cui s incontra rispettivamente l'asse y e la curva Γ *. Sul segmento AB prendete un punto P in modo che, detto Q il punto di* Γ *avente la stessa ascissa di P, sia massima l'area del triangolo APQ.*

Il punto A, intersezione di s con l'asse y, ha coordinate: $A = \left(0; \frac{1}{4}\right)$.
Il punto B, intersezione di s con Γ si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4} \\ y = \dfrac{x^3}{(2x-1)^2} \end{cases} \; ; \;\; \frac{x^3}{(2x-1)^2} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \;\; ; \ldots . ; \;\; 3x - 1 = 0 \;\; ; \;\; x = \frac{1}{3} \quad B = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

Rappresentiamo il triangolo APQ, con $P = \left(x; \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)$, $Q = \left(x; \frac{x^3}{(2x-1)^2}\right)$, $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$



Assunta come base del triangolo APQ il segmento PQ e come altezza relativa la distanza h di A dalla retta PQ, risulta: $PQ = y_P - y_Q = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{x^3}{(2x-1)^2} = \frac{1-3x}{4(2x-1)^2}$, $h = x_P = x$

$A(APQ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-3x}{4(2x-1)^2} \cdot x = \frac{(1-3x)x}{8(2x-1)^2}$; tale area è massima se lo è:

$$y = \frac{(1-3x)x}{(2x-1)^2} = \frac{x-3x^2}{(2x-1)^2} , \qquad con \ \ 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

Studiamo la derivata prima:

$$y' = \frac{(2x-1)(4x-1)}{(2x-1)^4} \geq 0 \ \ se \ \ x \leq \frac{1}{4} \ \ or \ \ x > \frac{1}{2}$$

La funzione è quindi crescente se $0 \leq x < \frac{1}{4}$ e decrescente se $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$: essa è quindi massima se $x = \frac{1}{4}$. Il triangolo APQ ha quindi area massima quando l'ascissa di P è 1/4. L'ordinata di P è $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$. Quindi $P = \left(\frac{1}{4}; \frac{5}{16}\right)$.

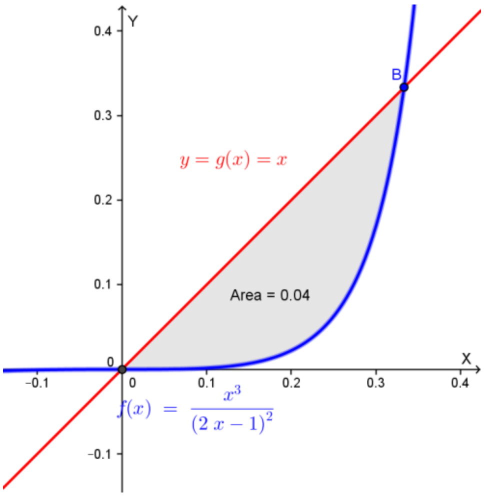
c)

Determinate l'area della regione finita di piano delimitata da Γ e dalla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Cerchiamo le intersezioni fra la retta e la curva:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{x^3}{(2x-1)^2} \end{cases} \ ; \ \ x = \frac{x^3}{(2x-1)^2} \ ; \ \ x = 0 \ \ e : \ \ (2x-1)^2 = x^2 , \ 3x^2 - 4x + 1 = 0 : \ x = 1 \ e \ x = \frac{1}{3}$$

I punti che ci interessano sono $(0;0)\ e\ \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[x - \frac{x^3}{(2x-1)^2}\right] dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\frac{3x^3 - 4x^2 + x}{4x^2 - 4x + 1}\right] dx =$$

effettuando la divisione fra numeratore e denominatore

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\frac{(4x^2 - 4x + 1)\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}}{4x^2 - 4x + 1}\right] dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) + \frac{-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}}{4x^2 - 4x + 1}\right] dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right)\right] dx - \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\frac{\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}}{4x^2 - 4x + 1}\right] dx = \left[\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4}x\right]_0^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{3}} \left[\frac{x - \frac{1}{3}}{4x^2 - 4x + 1}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{24} - \frac{1}{12} - \frac{3}{32}\int_0^{\frac{1}{3}} \left[\frac{8x - \frac{8}{3}}{4x^2 - 4x + 1}\right] dx = -\frac{1}{24} - \frac{3}{32}\int_0^{\frac{1}{3}} \left[\frac{8x - 4 + 4 - \frac{8}{3}}{4x^2 - 4x + 1}\right] dx =$$

$$= -\frac{1}{24} - \frac{3}{32}\int_0^{\frac{1}{3}} \left[\frac{8x - 4}{4x^2 - 4x + 1}\right] dx - \frac{3}{32}\int_0^{\frac{1}{3}} \left[\frac{\frac{4}{3}}{4x^2 - 4x + 1}\right] dx =$$

$$= -\frac{1}{24} - \frac{3}{32}\left[\ln|4x^2 - 4x + 1|\right]_0^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{32} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}} 2(2x-1)^{-2}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{24} - \frac{3}{32}\left[ln\left(\frac{1}{9}\right)\right] - \frac{1}{16} \cdot \left[-\frac{1}{2x-1}\right]_0^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{24} + \frac{3}{16}ln3 - \frac{1}{16}(3-1) =$$

$$= \frac{3\ln(3)}{16} - \frac{1}{6} \cong 0.04\ u^2 = Area$$

d)

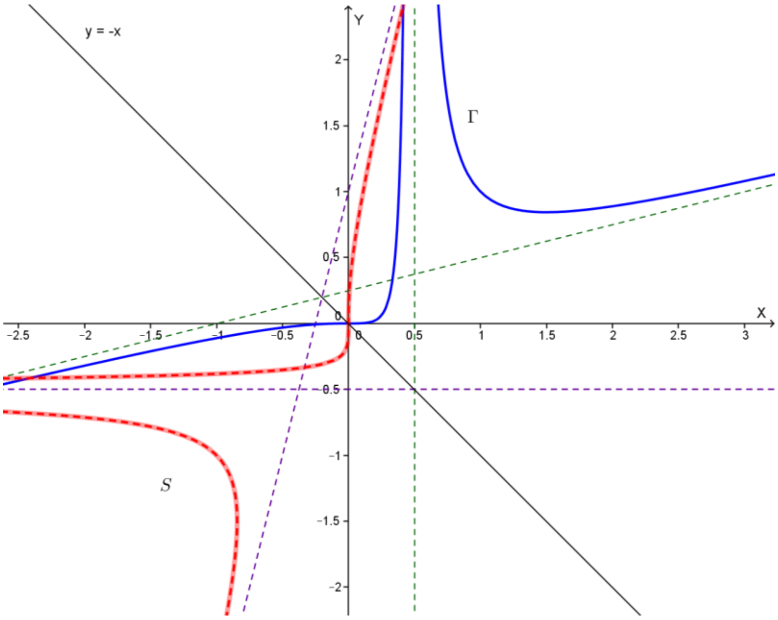
Determinate l'equazione della curva S simmetrica di Γ rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Le equazioni della simmetria rispetto alla retta $y = -x$ sono:

$$\begin{cases} X = -y \\ Y = -x \end{cases} ; \begin{cases} y = -X \\ x = -Y \end{cases} ; \begin{cases} y \to -x \\ x \to -y \end{cases}$$

La curva Γ: $y = \frac{x^3}{(2x-1)^2}$ si trasforma quindi in:

$$S: -x = \frac{(-y)^3}{(-2y-1)^2} \quad , \quad x = \frac{y^3}{(2y+1)^2}$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria