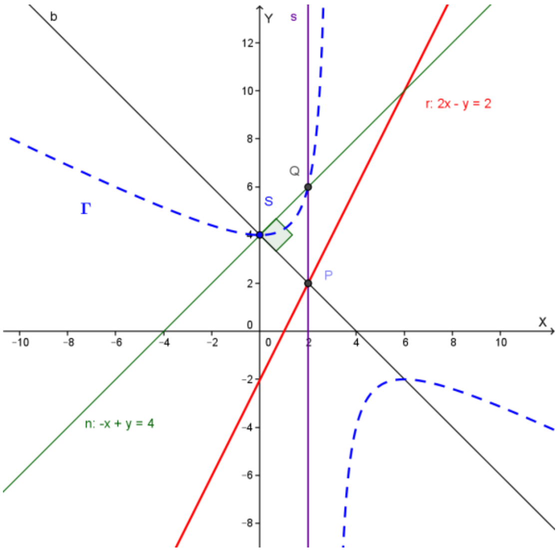
Scuole italiane all’estero (America latina) 2003 – PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, siano: S il punto di coordinate (0, 4); P un punto della retta r di equazione $2x - y - 2 = 0$*; n la retta per S perpendicolare alla congiungente S con P; Q il punto di intersezione di n con la retta s parallela per P all’asse y.*



a)

Trovate l’equazione cartesiana del luogo Γ *descritto da Q al variare di P su r.*

Il punto generico P della retta r ha coordinate: $P = (t; 2t - 2)$. Il coefficiente angolare della retta SP è: $m_{SP} = \frac{2t-2-4}{t-0} = \frac{2t-6}{t}$. Il coefficiente angolare di n sarà:

$$m_n = -\frac{1}{m_{PS}} = \frac{t}{6 - 2t}$$

La retta n ha quindi equazione:

$$n: y - y_S = m_n(x - x_S), \quad y - 4 = \frac{t}{6 - 2t}\, x \ , \quad y = \frac{t}{6 - 2t}\, x + 4$$

La retta s ha equazione: $s\colon\ x = t$. Il luogo descritto da Q al variare di P su r si ottiene quindi dal seguente sistema, eliminando il parametro t:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t}{6 - 2t}\, x + 4 \end{cases}, \quad y = \frac{x}{6 - 2x}\, x + 4 \ , \qquad y(6 - 2x) = x^2 + 4(6 - 2x)$$

Il luogo richiesto ha quindi equazione: $x^2 + 2xy - 8x - 6y + 24 = 0$, che è una conica ed in particolare un'iperbole che può essere scritta nella forma:

$$y = \frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x}$$

b)

Studiate Γ *, disegnatene il grafico e spiegate con considerazioni geometriche quanto si riscontra, analiticamente, per x = 3.*

Come già detto Γ è un'iperbole. Essa ha un asintoto verticale di equazione x=3 ed un asintoto obliquo; troviamo l'equazione di questo asintoto:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x} . \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{-2x^2} = -\frac{1}{2} \quad , \quad q = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x} - mx\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x} + \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 24}{2(3 - x)} + \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 24 + 3x - x^2}{2(3 - x)}\right] =$$

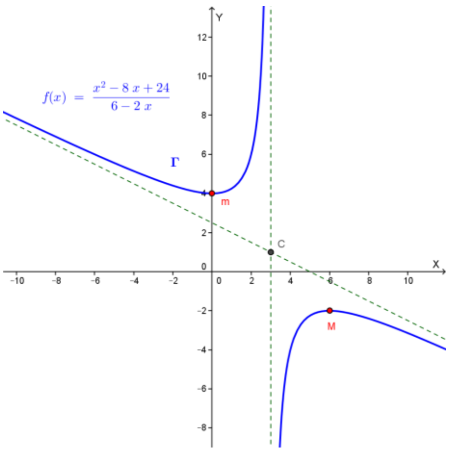
$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{-5x + 24}{2(3 - x)}\right] = \frac{5}{2} = q : \quad asintoto\ obliquo\ \ y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

L'iperbole ha centro in $(3; 1)$

Per completare lo studio cerchiamo il massimo ed il minimo relativi:

$f'(x) = \frac{x(6-x)}{2(x-3)^2} \geq 0 \;\; se \;\; 0 \leq x \leq 6 \;\; (on\ x \neq 3)$. Quindi la funzione è crescente se

$0 < x < 3,\ 3 < x < 6$ e decrescente se $x < 0, x > 6$. Quindi il minimo relativo si ha per x=0 ed il massimo relativo per x=6. L'iperbole ha quindi il seguente grafico:

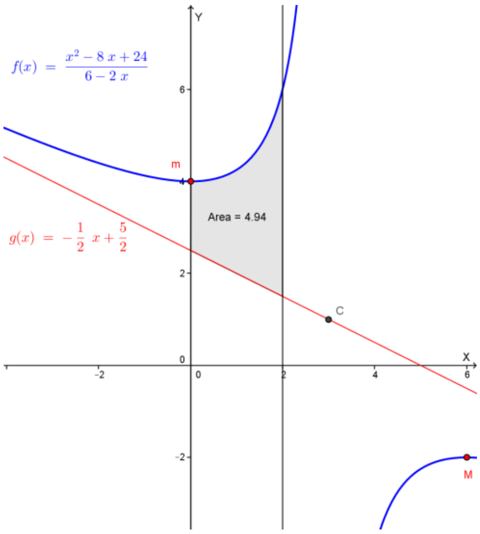


La funzione può essere chiaramente studiata prescindendo dal fatto che è un'iperbole.

Osserviamo che la funzione non è definita per x=3. Geometricamente si ha la seguente situazione: se x=3 il punto P (appartenente ad r: $2x - y - 2 = 0$) ha coordinate (3; 4), perciò la retta PS è y=4. La normale n coincide con l'asse y e quindi non incontra la retta x=3: Q non esiste.

c)

Si calcoli l'area della regione di piano racchiusa tra Γ , il suo asintoto obliquo, l'asse y e la retta x=2.



L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$Area = \int_0^2 \left[\frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x} - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)\right] dx = \int_0^2 \left[\frac{9}{6 - 2x}\right] dx = -\frac{9}{2}\int_0^2 \frac{-2}{6 - 2x} dx =$$

$$= -\frac{9}{2}[\ln|6 - 2x|]_0^2 = -\frac{9}{2}(ln2 - ln6) = -\frac{9}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{9}{2}\, ln3\right)\ u^2 \cong 4.94\ u^2 = Area$$

d)

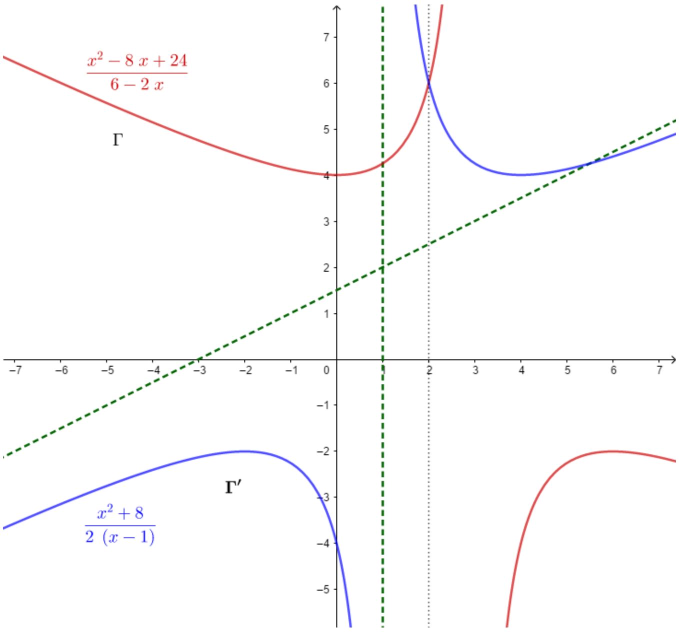
Si trovi l'equazione del luogo K simmetrico di Γ rispetto alla retta x = 2.

$$\Gamma:\ x^2 + 2xy - 8x - 6y + 24 = 0,\ \ y = \frac{x^2 - 8x + 24}{6 - 2x}$$

La simmetria rispetto alla retta x=2 ha equazioni: $x \to 4 - x,\ y \to y$. Quindi si ha:

$(4-x)^2+2(4-x)y-8(4-x)-6y+24=0,\ \ x^2-2xy+2y+8=0$

$\Gamma'\colon\ \ y=\dfrac{x^2+8}{2(x-1)}$



Con la collaborazione di Angela Santamaria