Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2003

QUESITO 1

Quale è il dominio della funzione $f(x) = x^{\pi} - \pi^{\pi}$? Quale ne è il segno della derivata prima e quale quello della derivata seconda nel punto π ?

Dominio: $x \geq 0$.

$$f'(x) = \pi\, x^{\pi-1} > 0 \quad per\ x > 0$$

$$f''(x) = \pi(\pi-1)x^{\pi-2} > 0 \quad per\ x > 0$$

Quindi: $f'(\pi) > 0 \quad e \quad f''(\pi) > 0$.

N.B.

Probabilmente il testo della funzione è $f(x) = x^{\pi} - \pi^{x}$. In tal caso:

Dominio: $x \geq 0$.

$f'(x) = \pi\, x^{\pi-1} - \pi^{x} \ln \pi\,; \quad f'(\pi) = \pi \cdot \pi^{\pi-1} - \pi^{\pi} \ln \pi = \pi^{\pi}(1 - \ln \pi) < 0 \ \ perchè\ \ \pi > e$

$quindi\ \ \ln \pi > 1\ ,\ \ 1 - \ln \pi < 0\,.$

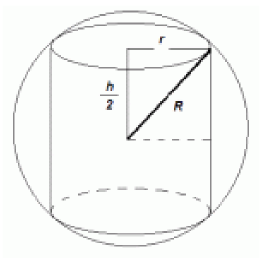
$f''(x) = \pi(\pi-1)x^{\pi-2} - \ln \pi\,(\pi^{x} \ln \pi)\,; \quad f''(x) = \pi(\pi-1)\pi^{\pi-2} - \ln \pi\,(\pi^{\pi} \ln \pi) =$

$= (\pi-1)\pi^{\pi-1} - \ln \pi\,(\pi^{\pi} \ln \pi) = \pi^{\pi} - \pi^{\pi-1} - \pi^{\pi} \ln^{2} \pi = \pi^{\pi}(1 - \ln^{2} \pi) - \pi^{\pi-1} < 0$

$perchè\ \ln \pi > 1\ ,quindi\ \ \ln^{2} \pi > 1, \qquad quindi\ \ 1 - \ln^{2} \pi < 0$

QUESITO 2

Calcolate il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.



Detti R ed r i raggi della sfera e della base del cilindro, essendo il cilindro equilatero l'altezza è uguale al diametro di base, quindi: $h = 2r$; $\frac{h}{2} = r$; $R = r\sqrt{2}$. Perciò:

$$S_T(cilindro) = 2(\pi r^2) + S_l = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r(2r) = 6\pi r^2$$

$$S(sfera) = 4\pi R^2 = 4\pi(2r^2) = 8\pi r^2$$

$$\frac{S_T(cilindro)}{S(sfera)} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4}$$

QUESITO 3

Dimostrate che

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\,.$$

Posto $t = \frac{1}{x}$ il limite diventa:

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e \quad in\ base\ ad\ un\ noto\ limite\ notevole\,.$$

QUESITO 4

Dimostrate che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2.

Indicato con x un numero reale positivo, dobbiamo dimostrare che:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,\ \ cioè:\ \frac{x^2+1-2x}{x} \geq 0$$

Siccome x>0, basta che sia:

$$x^2 + 1 - 2x \geq 0\,,\quad (x-1)^2 \geq 0:\quad vero\ per\ ogni\ x\,.$$

QUESITO 5

I <u>gradi sessagesimali</u>, i <u>radianti</u> e i <u>gradi centesimali</u> sono le più comuni unità per la misura degli angoli. Date di ciascuna di esse una esauriente definizione.

Il *grado sessagesimale* è la novantesima parte dell'angolo retto.
Il *grado centesimale* è la centesima parte dell'angolo retto.
Il *radiante* è definito nel seguente modo: si consideri una qualsiasi circonferenza con centro nel vertice dell'angolo e sia l la lunghezza dell'arco interno all'angolo avente per

estremi le intersezioni dei lati dell'angolo con la circonferenza stessa. Detto r il raggio della circonferenza, il rapporto fra $l\ ed\ r$ è indipendente dalla circonferenza ma dipende solo dall'ampiezza dell'angolo: tale rapporto è definito come misura in radianti dell'angolo. Per avere 1 radiante basta prendere $l = r$.

Il $radiante$ è quindi l'angolo che intercetta un arco di circonferenza, con centro nel suo vertice, che, rettificato, ha lunghezza uguale al raggio della circonferenza stessa

QUESITO 6

Sia $A\hat{P}B$ un angolo la cui misura in radianti è data dal numero e di Nepero, base dei logaritmi naturali. Quale è la misura in gradi sessagesimali di $A\hat{P}B$ e quale quella in gradi centesimali? Motivate la vostra risposta.

Ricordiamo che, detti $\alpha°\ ed\ \alpha$ le misure in gradi sessagesimali ed in radianti dell'angolo, si ha la seguente relazione:

$$\alpha°:\alpha = 180°:\pi \ , \qquad \alpha° = \frac{\alpha \cdot 180°}{\pi} = \frac{e \cdot 180°}{\pi} \cong 155.75° = \alpha°$$

Indichiamo ora con α^g la misura in gradi centesimali dell'angolo. Si ha:

$$\alpha^g:\alpha = 200^g:\pi \ , \qquad \alpha^g = \frac{\alpha \cdot 200^g}{\pi} = \frac{e \cdot 200^g}{\pi} \cong 173.05^g = \alpha^g$$

QUESITO 7

Calcolate la derivata della funzione

$$f(x) = \arctan x - \arctan\frac{x-1}{x+1}.$$

Quali conclusioni ne potete trarre per la f(x)? La funzione è una costante? Se sì, quale è la costante?

La derivata della funzione è:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{2x^2+2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = 0$$

Siccome la funzione è definita per x<-1 e x>-1, possiamo dire che funzione è costante a tratti; posto $a = \arctan x \quad e \quad b = \arctan\frac{x-1}{x+1}$ abbiamo: $x = \tan a$, $\frac{x-1}{x+1} = \tan b$ da cui:

$$x - 1 = (x+1)\tan b \ , \qquad x = \frac{\tan b + 1}{1 - \tan b}: \ \tan a = \frac{\tan b + 1}{1 - \tan b} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan b}{\tan\frac{\pi}{4} - \tan b \tan\frac{\pi}{4}} =$$

$= \tan\left(\frac{\pi}{4}+b\right)$, $\quad quindi: \; a=\frac{\pi}{4}+b+k\pi, \quad a-b=\frac{\pi}{4}+k\pi$

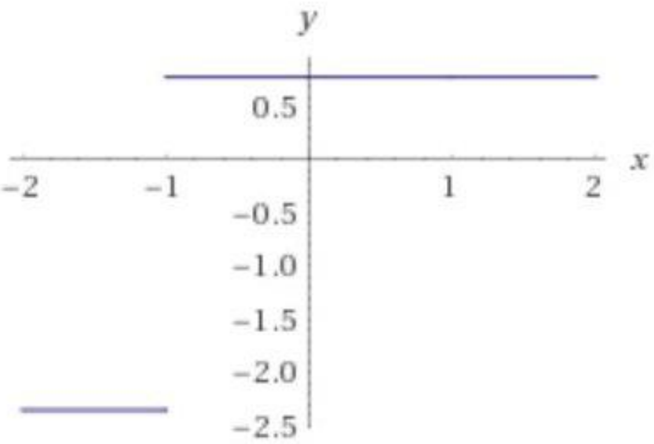
Studiamo il segno di $a-b=\arctan x-\arctan\frac{x-1}{x+1}$:

$\arctan x-\arctan\frac{x-1}{x+1}>0$; se $x>\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{x^2+1}{x+1}>0$: $x>-1$

Quindi $a-b=\frac{\pi}{4}$ $se \; x>-1 \quad e \quad a-b=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3}{4}\pi \quad se \; x<-1$.

Pertanto:

$$f(x)=\arctan x-\arctan\frac{x-1}{x+1}=\begin{cases}-\frac{3}{4}\pi & se \;\; x<-1 \\ \frac{\pi}{4} & se \;\; x>-1\end{cases}$$



Secondo metodo

Se x>-1, essendo f derivabile in un intervallo con derivata nulla ovunque, la funzione è costante (conseguenza del teorema di Lagrange); posso calcolare il valore di tale costante prendendo per esempio x=0:

$$f(0)=\arctan 0-\arctan(-1)=\frac{\pi}{4}$$

In modo analogo per x<-1, il valore della costante lo posso calcolare per esempio prendendo $x=-\sqrt{3}$, quindi:

$$f(-\sqrt{3})=\arctan(-\sqrt{3})-\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1}\right)=-\frac{\pi}{3}-\arctan(2+\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}-\frac{5}{12}\pi=-\frac{3}{4}\pi$$

Quindi, come trovato con il primo metodo:

$$f(x)=\arctan x-\arctan\frac{x-1}{x+1}=\begin{cases}-\frac{3}{4}\pi & se \;\; x<-1 \\ \frac{\pi}{4} & se \;\; x>-1\end{cases}$$

QUESITO 8

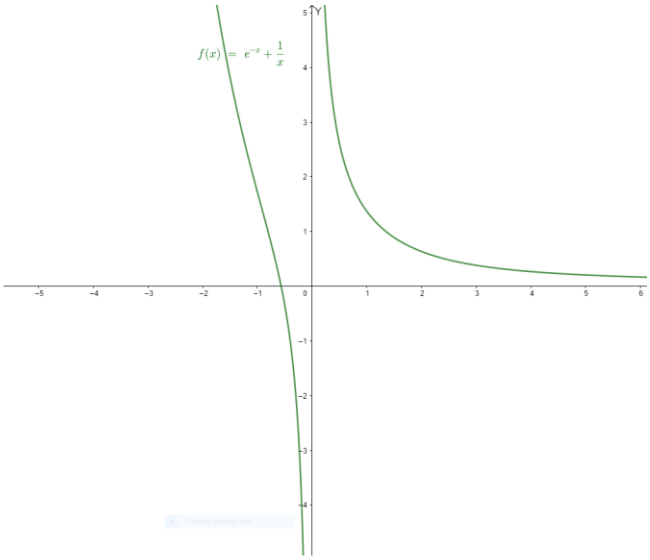
Verificate che la funzione: $y = f(x) = e^{-x} + x^{-1}$ *è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolate* $g'(1 + e^{-1})$.

La funzione è definita per ogni x non nullo. Analizziamo la derivata prima:

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x^2} < 0 \ \ in\ tutto\ il\ dominio$$

La funzione è quindi strettamente decrescente per x<0 e per x>0 (ma non è decrescente in tutto il dominio); da uno studio sommario della funzione (basta calcolare i limiti agli estremi del dominio) segue che: LA FUNZIONE NON E' INVERTIBILE IN TUTTO IL DOMINIO; E' INVERTIBILE PER X<0 OPPURE PER X>0.

Un grafico qualitativo della funzione è il seguente:



Osserviamo che se $y = 1 + e^{-1}\ \ risulta\colon\ 1 + e^{-1} = e^{-x} + x^{-1},\ \ da\ cui\colon x = 1\ \ e\ x = a < 0$

Se consideriamo la restrizione di f con x>0 avremo:

$$g'(1 + e^{-1}) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-e^{-1} - 1} = \frac{-e}{1 + e}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria