Scuole italiane all'estero (Americhe) 2003 – PROBLEMA 2

Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy:

a)

Tra le iperboli di equazione xy = k indicare con j quella che passa per il punto A(1; 3) e chiamare B il suo punto di ascissa -3.

Imponiamo il passaggio per A: 3=k; quindi $j\colon\ xy=3$. Ponendo $x=-3$ si ha: $B=(-3;-1)$.

b)

Determinare i coefficienti dell'equazione $y=ax^2+bx+c$ *in modo che la parabola p rappresentata da essa sia tangente a j in A e passi per B.*

Imponiamo a p di passare per A e B:

$\begin{cases} 3=a+b+c \\ -1=9a-3b+c \end{cases}$; $sottrando\ alla\ seconda\ la\ prima\ otteniamo$: $\begin{cases} a+b+c=3 \\ 8a-4b=-4 \end{cases}$;

$\begin{cases} a+b+c=3 \\ b=2a+1 \end{cases}$; $\begin{cases} a+2a+1+c=3 \\ b=2a+1 \end{cases}$; $\begin{cases} c=2-3a \\ b=2a+1 \end{cases}$

La parabola ha quindi equazione del tipo: $y=ax^2+(2a+1)x+2-3a$

La parabola p è tangente all'iperbole j in A se in esso hanno la stessa tangente, quindi, posto $y=f(x)=\frac{3}{x}$ e $y=g(x)=ax^2+(2a+1)x+2-3a$ deve essere: $f'(x_A)=g'(x_A)$
Ma è: $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$, $f'(1)=-3$; $g'(x)=2ax+2a+1$, $g'(1)=4a+1$. Pertanto: $4a+1=-3$, $a=-1$. La parabola p ha quindi equazione:

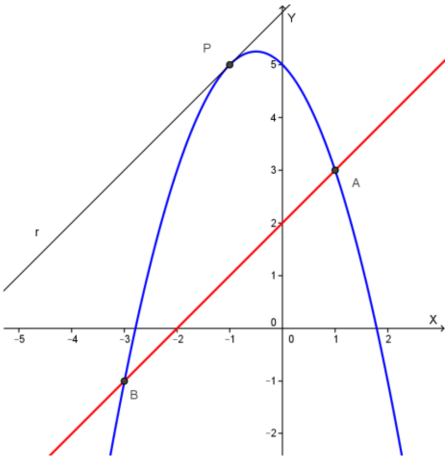
$$p\colon\ y=-x^2-x+5\ .$$

c)

Determinare le coordinate del punto situato sull'arco AB della parabola p e avente la massima distanza dalla retta AB.

La retta AB, con $A = (1; 3)$ e $B = (-3; -1)$ ha equazione: $\frac{y-3}{-1-3} = \frac{x-1}{-3-1}$, $y = x + 2$.

Rappresentiamo nello stesso piano cartesiano la parabola e la retta e osserviamo che il punto P dell'arco AB di parabola che ha massima distanza dalla retta AB è il punto di tangenza della retta r parallela ad AB e tangente alla parabola stessa.



La retta parallela ad AB ha equazione del tipo: $y = x + q$; essa è tangente alla parabola in quel punto di ascissa x tale che $g'(x) = 1$, con $g(x) = -x^2 - x + 5$. Quindi:

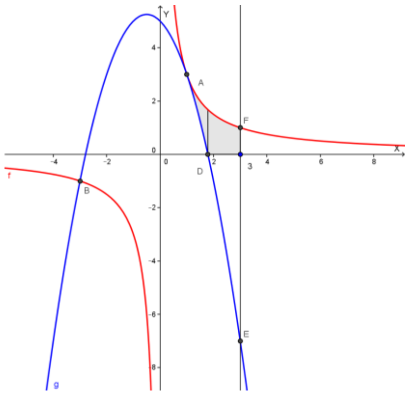
$-2x - 1 = 1$, $x = -1$ e perciò $y = g(-1) = -1 + 1 + 5 = 5$.

Il punto P ha quindi coordinate $(-1; 5)$.

d)

Indicata con R la regione finita di piano delimitata dall'iperbole j , dalla parabola p, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 3$, calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

Rappresentiamo graficamente la regione R:



Cerchiamo l'ascissa dell'intersezione D fra la parabola e l'asse x:

$$-x^2 - x + 5 = 0, \qquad x_D = \frac{1-\sqrt{21}}{-2} = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$$

Il volume richiesto è dato da:

$$V = \pi \int_1^{x_D} \left[\left(\frac{3}{x}\right)^2 - (-x^2 - x + 5)^2 \right] dx + \pi \int_{x_D}^3 \left(\frac{3}{x}\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_1^{x_D} \left[\frac{9}{x^2} - (x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 10x + 25) \right] dx + \pi \int_{x_D}^3 \frac{9}{x^2} dx =$$

$$= \pi \left[-\frac{9}{x} - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 25x \right]_1^{x_D} + \pi \left[-\frac{9}{x} \right]_{x_D}^3 = \cdots = \left(\frac{783}{20} - \frac{33}{4}\sqrt{21} \right)\pi +$$

$$+ \left(-3 + \frac{9}{\frac{\sqrt{21}-1}{2}} \right)\pi = \left(\frac{783}{20} - \frac{33}{4}\sqrt{21} \right)\pi + \left(\frac{9\sqrt{21}-21}{10} \right)\pi =$$

$$= \left(\frac{741 - 147\sqrt{21}}{20} \right)\pi \cong 3.368\ \pi \cong 10.581\ u^3 = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria