## Scuole italiane all'estero (Americhe boreale suppletiva) 2003

# PROBLEMA 1

*In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnati i punti A(a,0) e B(0,2a), dove a è un parametro reale positivo.*

### a)

*Trovare l'equazione della parabola di asse parallelo all'asse y, avente il vertice in A e passante per B.*

La parabola è del tipo $y - y_v = h(x - x_V)^2, \quad y - 0 = h(x-a)^2$ ,

Imponendo il passaggio per B: $2a = h\,a^2, \;\; h = \frac{2}{a} \;\; quindi: \quad y = \frac{2}{a}\,(x-a)^2.$

### b)

*Sull'arco AB della parabola determinare il punto P per il quale risulta minima la somma delle coordinate e calcolare il valore di a per cui questa somma minima vale 7/4.*

Posto P=(x; y), con $0 \le x \le a \;\; e \;\; y = \frac{2}{a}\,(x-a)^2$
Dobbiamo stabilire quando s=x+y è minima. Risulta:

$s = x + y = x + \frac{2}{a}\,(x-a)^2 = x + \frac{2}{a}x^2 - 4x + 2a = \frac{2}{a}x^2 - 3x + 2a$ . Il minimo (essendo a>0) si ha nel vertice della parabola corrispondente a tale equazione, cioè in

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{\frac{4}{a}} = \frac{3}{4}a$$

Tale valore soddisfa la condizione $0 \le x \le a$ , quindi la somma delle coordinate di P è minima se $x = \frac{3}{4}a$ e quindi $y = \frac{2}{a}\,(x-a)^2 = \frac{2}{a}\left(\frac{3}{4}a - a\right)^2 = \frac{2}{a}\left(\frac{1}{16}a^2\right) = \frac{1}{8}a$ . Pertanto:

$P = \left(\frac{3}{4}a; \frac{1}{8}a\right)$. Il valore di a per cui la somma vale 7/4 è:

$$s = x + y = \frac{3}{4}a + \frac{1}{8}a = \frac{7}{8}a = \frac{7}{4} \quad se \quad a = 2.$$

## c)

*Chiamata k la parabola corrispondente al valore di a così trovato, determinare l'equazione della retta t tangente a k nel suo punto P e quella della retta p perpendicolare a t in P.*

Per $a = 2$ la parabola di equazione $y = \frac{2}{a}(x-a)^2$ diventa:

$k\colon\ y = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

Il punto P ha coordinate: $P = \left(\frac{3}{4}a;\ \frac{1}{8}a\right) = \left(\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$. Il coefficiente angolare della tangente in P è dato da $y'\left(\frac{3}{2}\right)$. Essendo $y' = 2x - 4$ si ha $y'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$. La tangente in P ha quindi equazione:

$$t\colon\ y - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{3}{2}\right),\quad y = -x + \frac{7}{4}$$

La perpendicolare a t in P ha coefficiente angolare 1 ed ha equazione:

$$p\colon y - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right),\quad y = x - \frac{5}{4}$$

## d)

*Indicato con Q il punto in cui la retta p interseca ulteriormente la parabola k, calcolare le aree delle due parti in cui il cerchio di diametro AB è diviso dalla parabola k.*

Cerchiamo le intersezioni fra p e k:

$$\begin{cases} y = x - \frac{5}{4} \\ y = x^2 - 4x + 4 \end{cases}\ ;\quad x^2 - 4x + 4 = x - \frac{5}{4}\ ;\quad x^2 - 5x + \frac{21}{4} = 0\ ;$$

$che\ ha\ soluzioni\colon\ x = \frac{3}{2}\ \ e\ \ x = \frac{7}{2}$. Quindi Q è il punto di p con ascissa 7/2:

$$y_Q = x - \frac{5}{4} = \frac{7}{2} - \frac{5}{4} = \frac{9}{4}\ :\quad Q = \left(\frac{7}{2};\ \frac{9}{4}\right).$$

Determiniamo l'equazione della circonferenza di diametro AB.

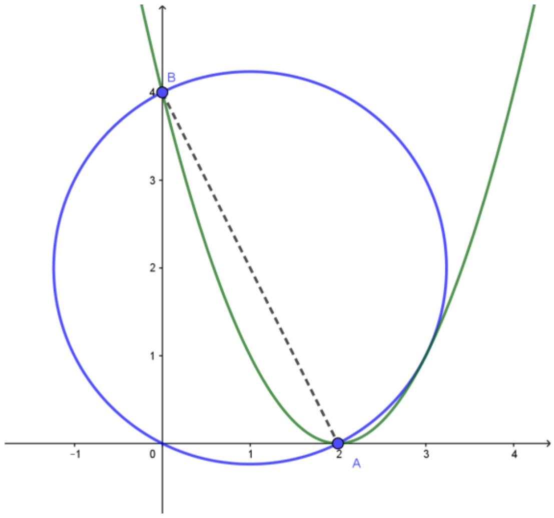
$$A = (a;0) = (2;0),\qquad B = (0;2a) = (0;4),\qquad AB = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}\ ,\ \ R = \sqrt{5}$$

Il centro della circonferenza è il punto medio C del segmento AB: $C = (1;\ 2)$ .

La circonferenza richiesta ha quindi equazione:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ , $\quad x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

Rappresentiamo graficamente la parabola e la circonferenza:




Le due parti si ottengono una aggiungendo e l'altra sottraendo all'area del semicerchio l'area del segmento parabolico individuato dal segmento AB.

Essendo il raggio del cerchio $R = \sqrt{5}$ la sua area vale: $\pi R^2 = \pi\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5\,\pi$.
$Area(semicerchio) = \frac{5}{8}\,\pi$ .
L'area del segmento parabolico si può trovare mediante il teorema di Archimede o mediante il calcolo integrale. Utilizziamo il secondo metodo.

La retta AB ha equazione: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ , $\quad y = -2x + 4$
L'area del segmento parabolico si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\int_0^2 [(-2x+4) - (x^2 - 4x + 4)]\,dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

Quindi le due parti in cui la parabola divide il cerchio hanno aree:

$Area(1) = Area(semicerchio) + Area(segm.par.) = \left(\frac{5}{2}\,\pi + \frac{4}{3}\right)\,u^2 \cong 9.19\,u^2$
$Area(2) = Area(semicerchio) - Area(segm.par.) = \left(\frac{5}{2}\,\pi - \frac{4}{3}\right)\,u^2 \cong 6.52\,u^2$

Con la collaborazione di Angela Santamaria