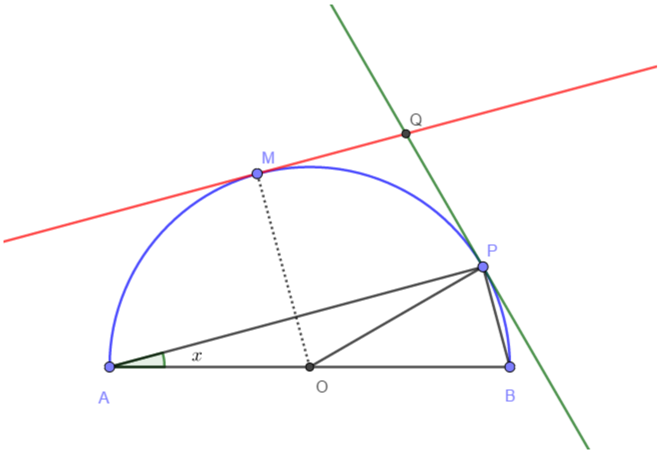
Scuole italiane all'estero (Americhe boreale suppletiva) 2003

PROBLEMA 2

Su una semicirconferenza di centro O e diametro AB, lungo 2r , dove r è una lunghezza nota, si consideri un punto P, si conduca, parallelamente alla retta AP, la tangente alla semicirconferenza e si chiami M il punto di contatto. Sia poi Q il punto in cui questa tangente interseca quella condotta per P.
Indicata con x l'ampiezza dell'angolo $P\hat{A}B$:



a)

Si esprima in funzione di x l'area S' del triangolo AOP.

Osserviamo che $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

$$S' = \frac{AO \cdot OP \cdot sen(A\hat{O}P)}{2} = \frac{1}{2}r^2 sen(\pi - 2x) = \frac{1}{2}r^2 sen(2x) = S'$$

b)

Si esprima in funzione di x l'area S'' del quadrilatero OPQM;

Osserviamo che OM è perpendicolare ad MQ, che MQ=QP e che OP è perpendicolare a PQ; quindi l'area S'' è il doppio dell'area del triangolo rettangolo OMQ. Siccome la retta AP è parallela alla retta MQ, essendo OM perpendicolare ad MQ risulta anche perpendicolare ad AP; pertanto OM è altezza e bisettrice nel triangolo AOP, quindi:

$M\hat{O}P=\frac{\pi}{2}-x$. Per una nota proprietà OQ è bisettrice dell'angolo MOP, perciò: $M\hat{O}Q=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$. Si ha allora: $MQ=OM\ tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=r\ tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$, perciò:

$Area(OMQ)=\frac{1}{2}OM\cdot MQ=\frac{1}{2}\ r\cdot\ r\ tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}r^2\ tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

L'area S'' è quindi:

$S''=2\ Area(OMQ)=r^2\ tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=S''$

c)

Posto $tan\frac{x}{2}=t$ *, si esprima in funzione di* t *il rapporto* $f(t)=\frac{S'}{S''}$.

Osserviamo che $0\leq\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}$, $quindi$: $0\leq t<1$

$$f(t)=\frac{S'}{S''}=\frac{\frac{1}{2}r^2sen(2x)}{r^2\ tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=\frac{sen(2x)}{2\ tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=\frac{2sen\ x\cos x}{2\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{x}{2}}\right)}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1-t}{1+t}}=$$

$$=\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{(1-t)(1+t)}{1+t^2}\cdot\frac{1+t}{1-t}=\frac{2t(1+t)^2}{(1+t^2)^2}=f(t)$$

d)

Si studi la funzione $f(t)$ *ottenuta e se ne disegni un andamento approssimato prescindendo dalla questione geometrica.*

Dobbiamo studiare la funzione $y=f(t)=\frac{2t(1+t)^2}{(1+t^2)^2},\ \ con\ \ t\ \in R$.

La funzione è definita e continua su tutto R, il suo grafico passa per l'origine degli assi cartesiani e taglia l'asse delle ascisse anche per t=-1. E' positiva per t>0 e negativa per t<0 (tranne che per t=-1 dove si annulla). Non è pari né dispari poiché f(-t) è diverso sia da f(t) sia da -f(t).

Calcoliamo i limiti all'infinito:

$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{2t(1+t)^2}{(1+t^2)^2}=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{2t^3}{t^4}=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{2}{t}=0^{\pm}\ :\ \ y=0\ asintoto\ orizzontale$. Non ci sono asintoti obliqui né verticali.

Studiamo la derivata prima, riscrivendo la funzione nella forma:

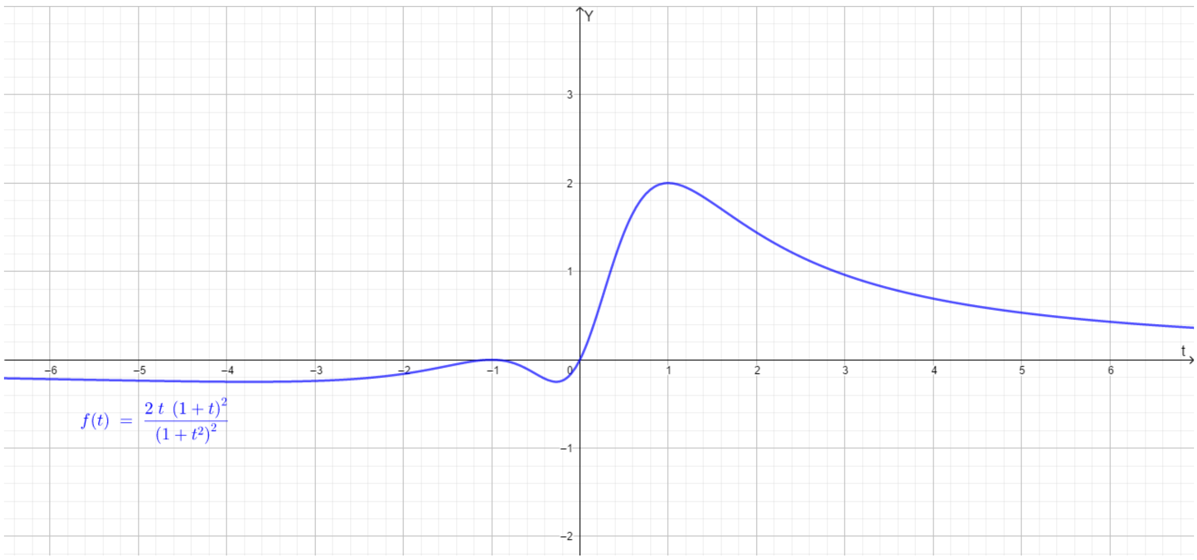
$$f(t)=\frac{2t(1+t^2+2t)}{(1+t^2)^2}=2\cdot\frac{t^3+2t^2+t}{(1+t^2)^2}$$

$$f'(t)=2\cdot\frac{-t^4-4t^3+4t+1}{(1+t^2)^3}=-2\cdot\frac{(t-1)(t+1)(t^2+4t+1)}{(1+t^2)^3}\geq 0\ \ se:$$

$$(t-1)(t+1)(t^2+4t+1)\leq 0:\ -2-\sqrt{3}\leq t\leq -1\ ,\quad -2+\sqrt{3}\leq t\leq 1$$

La funzione è quindi crescente se $-2-\sqrt{3}<t<-1$, $\ -2+\sqrt{3}<t<1$ e decrescente nella parte rimanente del dominio. Punti di minimo relativo: $t=-2\pm\sqrt{3}$, punti di massimo relativo $t=\pm 1$.

Possiamo tralasciare lo studio della derivata seconda, essendo richiesto un grafico approssimato, che è il seguente:



Con la collaborazione di Angela Santamaria