Scuole italiane all'estero (Americhe suppletiva) 2003 – Quesiti

QUESITO 1

Sapendo che sin 30° = 1/2 calcolare sin 15°.

Ricaviamo cos 30°: $\cos 30° = \sqrt{1-\sin^2 30°} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Usando le formule di bisezione abbiamo:

$$\sin(15°) = \sin\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Questo valore, usando la formula sui radicali doppi:

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

può essere scritto nella forma:

$$\sin(15°) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

QUESITO 2

Di triangoli in cui due lati hanno lunghezze rispettivamente: $b = 2\sqrt{3} - 2 \;\; e \;\; c = 4$
l'angolo opposto al primo di essi ha ampiezza $\beta = 15°$*, ne esistono*

a) nessuno;
b) uno;
c) due;
d) più di due.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta effettuata.

Indicando con a, b e c le misure dei lati del triangolo e con $\alpha, \beta, e\ \gamma$ le misure degli angoli in A, B e C rispettivamente, per il teorema dei seni abbiamo:

$$\frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma} \;\;,\;\; sen\,\gamma = \frac{c\ sen\,\beta}{b} = \frac{4\ sen\,15°}{2\sqrt{3}-2} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{2\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi: $\gamma_1 = 45° \;\; oppure \;\; \gamma_2 = 135°$

Quindi ci sono due possibili triangoli, essendo $\beta + \gamma_1 < 180° \;\; e \;\; \beta + \gamma_2 < 180°$:

la risposta corretta è la c).

QUESITO 3

Dimostrare che se tre rette distinte dello spazio passano per uno stesso punto O e ciascuna di esse interseca una quarta retta in un punto distinto da O allora le quattro rette sono complanari.

Dette a, b, e c le tre rette passanti per O ed r la quarta retta intersecata da a, b e c rispettivamente in $P_1, P_2, e\ P_3$ distinti da O, esiste uno ed un solo piano passante per O e contenente r: questo piano contiene a, b e c perché contiene due loro punti distinti , rispettivamente $O\ e\ P_1, O\ e\ P_2, O\ e\ \ P_3$

le tre rette appartengono quindi allo stesso piano.

QUESITO 4

Si consideri la seguente espressione:

$$\frac{\log_{1/4} 2 + \log_3 \sqrt[3]{9}}{\log_2 \sqrt[4]{8} - \log_{1/2} 8}$$

Il suo valore è:

$$a)\ \frac{2}{3}, \qquad b)\ \frac{1}{23}, \qquad c)\ \frac{2}{45}, \qquad d)\ -\frac{14}{27}.$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

$$\frac{\log_{1/4} 2 + \log_3 \sqrt[3]{9}}{\log_2 \sqrt[4]{8} - \log_{1/2} 8} = \frac{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + \log_3 (3)^{\frac{2}{3}}}{\log_2 (2)^{\frac{3}{4}} - \log_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}} = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-(-3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{15}{4}} = \frac{2}{45}$$

La risposta corretta è la c).

QUESITO 5

Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = \log\left(2x - \sqrt{4x-1}\right)$$

Deve essere: $2x - \sqrt{4x-1} > 0$, $\sqrt{4x-1} < 2x$ quindi:

$$\begin{cases} 4x - 1 \geq 0 \\ 2x > 0 \\ 4x - 1 < 4x^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x > 0 \\ 4x^2 - 4x + 1 > 0, \quad (2x-1)^2 > 0 : \quad x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il campo di esistenza è quindi: $\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < +\infty$.

QUESITO 6

Considerata la funzione $f(x) = \frac{1}{x^{x-1}}$ *, stabilire se esistono i suoi limiti per:*

$$a)\quad x \to -\infty\,, \qquad b)\quad x \to +\infty\,, \qquad c)\quad x \to 1\,,$$

e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

Il limite per $x \to -\infty$ non ha senso perché la funzione è definita per x>0.

Il limite per $x \to +\infty$ è 0^+ .

Il limite per $x \to 1$ è 1 .

QUESITO 7

Si consideri il seguente integrale

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx\,.$$

Il suo valore è, con buona approssimazione:

$$a)\ -0.024\,, \quad b)\ -0.24\,, \quad c)\ -2.4\,, \quad d)\ un\ valore\ diverso\ dai\ precedenti\,.$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Osserviamo che la funzione $f(x) = \frac{1}{x^4+x^2+1}$ è definita e positiva su tutto R, quindi l'integrale richiesto è positivo:

la risposta corretta è la d).

Con la collaborazione di Angela Santamaria