

ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico

Sessione ordinaria 2003

SECONDA PROVA SCRITTA

Tema di Matematica

(AMERICA- emisfero boreale)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{kx^3 + 9x}{x^2 + k}$$

dove k è un parametro reale non nullo.

- Determinare a quali valori di k corrispondono curve continue su tutto l'asse reale.
- Dimostrare che le curve assegnate hanno tre punti in comune.
- Dimostrare che i tre punti sono allineati.
- Tra le curve assegnate determinare la curva γ avente per asintoto la retta di equazione $y = x$ e disegnarne l'andamento.
- Verificare che i tre punti comuni a tutte le curve assegnate sono flessi per la curva γ .

Problema 2

Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy :

- tra le iperboli di equazione $xy = k$ indicare con j quella che passa per il punto $A(1,3)$ e chiamare B il suo punto di ascissa -3 ;
- determinare i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola p rappresentata da essa sia tangente a j in A e passi per B ;
- determinare le coordinate del punto situato sull'arco AB della parabola p e avente la massima distanza dalla retta AB ;
- indicata con R la regione finita di piano delimitata dall'iperbole j , dalla parabola p , dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 3$, calcolare il volume del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x .

Questionario

- Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono α, β, γ . Sapendo che $\cos \alpha = 5/13$ e $\cos \beta = 12/13$, calcolare il valore esatto di $\cos \gamma$, specificando se il triangolo è rettangolo, acutangolo o ottusangolo.
- In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy , è assegnata la curva di equazione $y = \cos x - 2 \sin x$. Determinare una traslazione degli assi che trasformi l'equazione nella forma $Y = k \sin X$.
- Un trapezio è circoscrittibile ad un cerchio. Dimostrare che il triangolo avente per vertici il centro del cerchio e gli estremi di uno dei lati obliqui è un triangolo rettangolo.

4. x ed y sono due numeri naturali qualsiasi tali che $x - y = 1$. Stabilire se il numero $x^4 - y^4$ è divisibile per 2 o se non lo è.
5. Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$y = \log \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

6. La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è derivabile in ogni x per cui risulti $1.0 \leq x \leq 1.1$; inoltre $f(1.1) = 0$ e $1.0 \leq f'(x) \leq 1.1$ in ogni x dell'intervallo $1.0 \leq x \leq 1.1$. Dimostrare che risulta: $-0.11 \leq f(1.0) \leq -0.10$.
7. Sia $f(x)$ una funzione continua e non negativa nell'intervallo chiuso e limitato $a \leq x \leq b$, rappresentata graficamente in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy . Indicata con R la regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, dimostrare che il volume V del solido generato dalla regione R quando ruota di un giro completo intorno all'asse x è dato dalla formula seguente:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$