

# ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico

Sessione ordinaria 2003

## SECONDA PROVA SCRITTA

### Tema di Matematica

(AMERICA- emisfero boreale)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario. Tempo concesso: 6 ore.

#### Problema 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ , sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{kx^3 + 9x}{x^2 + k}$$

dove  $k$  è un parametro reale non nullo.

- Determinare a quali valori di  $k$  corrispondono curve continue su tutto l'asse reale.
- Dimostrare che le curve assegnate hanno tre punti in comune.
- Dimostrare che i tre punti sono allineati.
- Tra le curve assegnate determinare la curva  $\gamma$  avente per asintoto la retta di equazione  $y = x$  e disegnarne l'andamento.
- Verificare che i tre punti comuni a tutte le curve assegnate sono flessi per la curva  $\gamma$ .

#### Problema 2

Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ :

- tra le iperboli di equazione  $xy = k$  indicare con  $j$  quella che passa per il punto  $A(1,3)$  e chiamare  $B$  il suo punto di ascissa  $-3$ ;
- determinare i coefficienti dell'equazione  $y = ax^2 + bx + c$  in modo che la parabola  $p$  rappresentata da essa sia tangente a  $j$  in  $A$  e passi per  $B$ ;
- determinare le coordinate del punto situato sull'arco  $AB$  della parabola  $p$  e avente la massima distanza dalla retta  $AB$ ;
- indicata con  $R$  la regione finita di piano delimitata dall'iperbole  $j$ , dalla parabola  $p$ , dall'asse  $x$  e dalla retta di equazione  $x = 3$ , calcolare il volume del solido generato dalla regione  $R$  quando ruota di un giro completo intorno all'asse  $x$ .

#### Questionario

- Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono  $\alpha, \beta, \gamma$ . Sapendo che  $\cos \alpha = 5/13$  e  $\cos \beta = 12/13$ , calcolare il valore esatto di  $\cos \gamma$ , specificando se il triangolo è rettangolo, acutangolo o ottusangolo.
- In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ , è assegnata la curva di equazione  $y = \cos x - 2 \sin x$ . Determinare una traslazione degli assi che trasformi l'equazione nella forma  $Y = k \sin X$ .
- Un trapezio è circoscrittibile ad un cerchio. Dimostrare che il triangolo avente per vertici il centro del cerchio e gli estremi di uno dei lati obliqui è un triangolo rettangolo.

4.  $x$  ed  $y$  sono due numeri naturali qualsiasi tali che  $x - y = 1$ . Stabilire se il numero  $x^4 - y^4$  è divisibile per 2 o se non lo è.
5. Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$y = \log \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

6. La funzione reale di variabile reale  $f(x)$  è derivabile in ogni  $x$  per cui risulti  $1.0 \leq x \leq 1.1$ ; inoltre  $f(1.1) = 0$  e  $1.0 \leq f'(x) \leq 1.1$  in ogni  $x$  dell'intervallo  $1.0 \leq x \leq 1.1$ . Dimostrare che risulta:  $-0.11 \leq f(1.0) \leq -0.10$ .
7. Sia  $f(x)$  una funzione continua e non negativa nell'intervallo chiuso e limitato  $a \leq x \leq b$ , rappresentata graficamente in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $Oxy$ . Indicata con  $R$  la regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione, dall'asse  $x$  e dalle rette  $x = a$  e  $x = b$ , dimostrare che il volume  $V$  del solido generato dalla regione  $R$  quando ruota di un giro completo intorno all'asse  $x$  è dato dalla formula seguente:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$