ESAME DI STATO: Indirizzo Scientifico
Sessione suppletiva 2003
SECONDA PROVA SCRITTA
Tema di MATEMATICA
(AMERICA – emisfero boreale)

Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario:
PROBLEMA 1.
In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti A(a,0) e B(0,2a), dove a è un parametro reale positivo.

a. Trovare l'equazione della parabola di asse parallelo all'asse y, avente il vertice in A e passante per B.
b. Sull'arco AB della parabola determinare il punto P per il quale risulta minima la somma delle coordinate e calcolare il valore di a per cui questa somma minima vale $\frac{7}{4}$.
c. Chiamata k la parabola corrispondente al valore di a così trovato, determinare l'equazione della retta t tangente a k nel suo punto P e quella della retta p perpendicolare a t in P.
d. Indicato con Q il punto in cui la retta p interseca ulteriormente la parabola k, calcolare le aree delle due parti in cui il cerchio di diametro AB è diviso dalla parabola k.

PROBLEMA 2.
Su una semicirconferenza di centro O e diametro AB, lungo 2r, dove r è una lunghezza nota, si consideri un punto P, si conduca, parallelamente alla retta AP, la tangente alla semicirconferenza e si chiami M il punto di contatto. Sia poi Q il punto in cui questa tangente interseca quella condotta per P. Indicata con x l'ampiezza dell'angolo $P\hat{A}B$:

a. si esprima in funzione di x l'area S' del triangolo AOP;
b. si esprima in funzione di x l'area S" del quadrilatero OPQM;
c. posto tg $\frac{x}{2}$ = t, si esprima in funzione di t il rapporto f(t) = $\frac{S'}{S''}$;
d. si studi la funzione f(t) ottenuta e se ne disegni un andamento approssimato prescindendo dalla questione geometrica.

QUESTIONARIO.

1. Sapendo che sen 30° = $\frac{1}{2}$, calcolare sen 15°.

2. Di triangoli in cui due lati hanno lunghezze rispettivamente: b = $2\sqrt{3}$-2 e c = 4 e l'angolo opposto al primo di essi ha ampiezza b = 15°, ne esistono:

A) nessuno; B) uno; C) due; D) più di due.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta effettuata.

3. Dimostrare che se tre rette distinte dello spazio passano per uno stesso punto O e ciascuna di esse interseca una quarta retta in un punto distinto da O allora le quattro rette sono complanari.

4. Si consideri la seguente espressione:

$$\frac{\log_{1/4} 2 + \log_3 \sqrt[3]{9}}{\log_2 \sqrt[4]{8} - \log_{1/2} 8}.$$

Il suo valore è:

A) $\frac{2}{3}$; B) $\frac{1}{23}$; C) $\frac{2}{45}$; D) $-\frac{14}{27}$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

5. Determinare il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = \ln\left(2x - \sqrt{4x-1}\right).$$

6. Considerata la funzione $f(x) = \frac{1}{x^{x-1}}$, stabilire se esistono i suoi limiti per: a) $x \to -\infty$, b) $x \to +\infty$, c) $x \to 1$, e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

7. Si consideri il seguente integrale: $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\,dx$. Il suo valore è, con buona approssimazione:

A) - 0.024; B) - 0.24; C) - 2.4; D) un valore diverso dai precedenti.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

· Durata della prova: 6 ore.
· Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.
· È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.