Scuole italiane all'estero (Europa) 2003 – PROBLEMA 1

Tra le circonferenze di equazione $x^2+y^2-4y-k=0$, *sia* Γ *quella di raggio* $2\sqrt{2}$. *Siano A e B i punti in cui* Γ *interseca l'asse x.*

Il quadrato della generica circonferenza è: $R^2=4+k=8,\ \ k=4$. Quindi Γ ha equazione: $x^2+y^2-4y-4=0$. Le intersezioni con l'asse x sono date da: $x^2-4=0,\ \ x=\pm 2$. Quindi: $A=(-2;0),\ \ B=(2;0)$.

a)

Determinare l'equazione della parabola p, con asse parallelo all'asse y, passante per A e tangente in B alla retta di equazione $y=-2x+4$.

La parabola p ha equazione del tipo: $y=ax^2+bx+c$. Imponiamo il passaggio per A e B:

$\begin{cases} 0=4a-2b+c \\ 0=4a+2b+c \end{cases}$; $\ sottraendo\ membro\ a\ membro: b=0,\ \ \ c=-4a$

Quindi p ha equazione del tipo: $y=ax^2-4a$

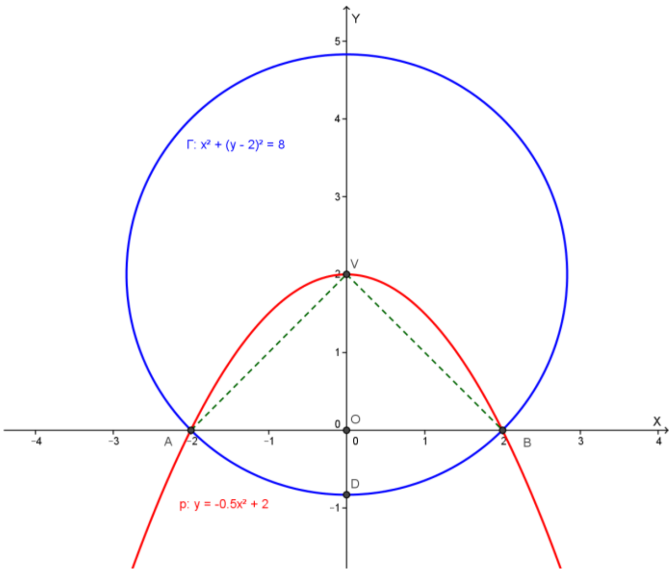
Il coefficiente angolare della generica tangente in un punto della parabola è: $y'=2ax$
Deve essere: $y'(2)=-2$ quindi: $4a=-2,\ \ a=-\frac{1}{2}$. Pertanto:

$$p\colon\ y=-\frac{1}{2}x^2+2$$

b)

Calcolare l'area di ciascuna delle due parti in cui p divide il cerchio Γ *.*

Rappresentiamo nello stesso sistema di riferimento le due curve, dopo aver notato che la circonferenza ha centro V=(0; 2) e raggio $R=2\sqrt{2}$ e la parabola passa per A e B ed ha vertice in V=(0; 2). Osserviamo che il triangolo AVB è rettangolo in V, essendo i triangoli AOV e BOV rettangoli isosceli congruenti.



Per il Teorema di Archimede l'area del segmento parabolico AVB è uguale a:

$Area(segm.par.) = \frac{2}{3} AB \cdot OV = \frac{16}{3}\ u^2$

L'area settore circolare AVBD è: $\frac{1}{4}\ Area(cerchio) = \frac{1}{4}\pi \cdot 8 = 2\pi\ u^2$

L'area del triangolo AVB è: $4\ u^2$

L'area del segmento circolare AOBD è: $(2\pi - 4)\ u^2$

Una delle due parti in cui la parabola divide il cerchio è quindi:

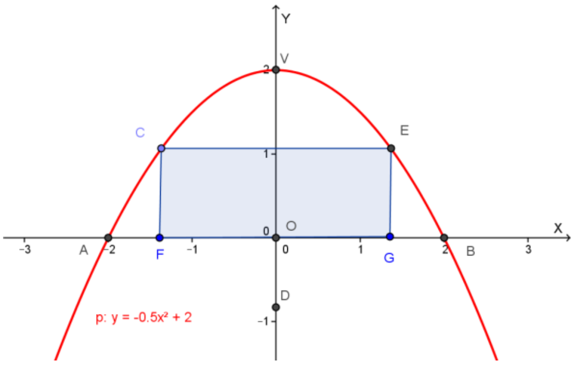
$Area(segm.par.) + Area(segm.circ.) = \frac{16}{3}\ u^2 + (2\pi - 4)\ u^2\ = \left(\frac{4}{3} + 2\pi\right)\ u^2 \cong 7.62\ u^2$

La seconda delle due parti in cui la parabola divide il cerchio è data da:

$Area\ (cerchio) - \left(\frac{4}{3} + 2\pi\right)\ u^2 = 8\pi\ u^2 - \left(\frac{4}{3} + 2\pi\right)\ u^2 = \left(6\pi - \frac{4}{3}\right)\ u^2 \cong 17.52\ u^2$

c)

Nel segmento parabolico determinato dalla corda AB inscrivere un rettangolo, con un lato su AB, di area massima.



Indichiamo con x l'ascissa di G (con $0 \leq x \leq 2$); l'ordinata di E sarà: $-\frac{1}{2}x^2 + 2$.
L'area del rettangolo richiesto è quindi:

$Area = FG \cdot EG = 2x\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) = -x^3 + 4x$; calcoliamo il massimo della funzione

$z = -x^3 + 4x\,, \quad con\ \ 0 \leq x \leq 2$

$z' = -3x^2 + 4 \geq 0\ \ se\ \ x^2 \leq \frac{4}{3}\ \ ,\ -\sqrt{\frac{4}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$. La funzione è quindi crescente se $0 \leq x < \sqrt{\frac{4}{3}}$ e decrescente se $\sqrt{\frac{4}{3}} < x \leq 2$: essa è massima se $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$; per tale valore di x si ottiene: $y_E = -\frac{1}{2}x^2 + 2 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$. Il rettangolo richiesto ha quindi vertici:

$F = \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\ ; 0\right),\ G = \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\ ; 0\right),\ E = \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\ ; \frac{4}{3}\right),\ C = \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\ ; \frac{4}{3}\right).$

d)

Tale rettangolo è anche quello di massimo perimetro?

Il perimetro del rettangolo è dato da:

$P = 2FG + 2GE = 2x + 2\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) = -x^2 + 2x + 4\,, \qquad con\ 0 \leq x \leq 2$
Il grafico di questa funzione è una parabola rivolta verso il basso, quindi il suo massimo è nel vertice, cioè per $x = -\frac{b}{2a} = 1$.

Il rettangolo di area massima **non** è quello che ha anche il perimetro massimo.

Con la collaborazione di Angela Santamaria