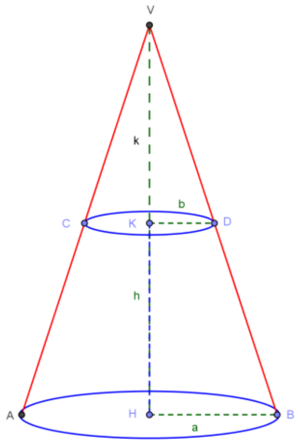
Scuole italiane all’estero (Europa) 2003 – PROBLEMA 2

Si consideri un cono circolare retto.



a)

Si sezioni il cono con un piano parallelo alla base e si indichino con a, b (a > b) e h rispettivamente le misure dei raggi delle basi e l’altezza del tronco che ne risulta. Si esprimano in funzione di a, b, h il volume e la superficie laterale del tronco di cono illustrando il ragionamento seguito.

Il volume del tronco può essere determinato sottraendo al cono dato il cono con raggio di base b e altezza k pari alla differenza fra l’altezza del cono e l’altezza h del tronco.

$V(cono)=\frac{1}{3}a^2\pi(h+k)$; $V(cono\ piccolo)=\frac{1}{3}\pi b^2 h$;

$V(tronco)=\frac{1}{3}\pi a^2(h+k)-\frac{1}{3}b^2k$

Dalla similitudine fra i triangoli VHB e VKD si ottiene: $\frac{a}{b}=\frac{h+k}{k}$, $ak=bh+bk$, quindi:

$k=\frac{bh}{a-b}$; si ha perciò:

$$V(tronco)=\frac{1}{3}\pi a^2(h+k)-\frac{1}{3}\pi b^2k=V(tronco)=\frac{1}{3}a^2\pi\left[\left(h+\frac{bh}{a-b}\right)-\frac{1}{3}b^2\frac{bh}{a-b}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\left[a^2\left(1+\frac{b}{a-b}\right)-b^2\frac{b}{a-b}\right]=\frac{1}{3}\pi h\left(\frac{a^3}{a-b}-\frac{b^3}{a-b}\right)=\frac{1}{3}\pi h\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\left(\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b}\right)=\frac{1}{3}\pi(a^2+ab+b^2)h=V(tronco\ cono)$$

La superficie laterale del tronco di cono è data da:

$$S_l(tronco\ cono)=\pi(r_1+r_2)a,\ r_1 ed\ r_2\ raggi\ delle\ basi,\ a=apotema\ del\ tronco$$

La superficie richiesta può ottenersi come differenza fra la superficie laterale del cono grande e quella del cono piccolo. Ricordando che la superficie laterale di un cono è data da: $S_l(cono)=\pi Ra$, essendo R il raggio del cono ed a l'apotema del cono, abbiamo:

$$S_l(tronco)=\pi a\cdot BV-\pi b\cdot DV$$

Dalla similitudine fra i triangoli VHB e VKD si ottiene: $\frac{a}{b}=\frac{BV}{VD},\ \ VD=\frac{b}{a}\cdot BV$
Risulta poi (ricordando che $k=\frac{bh}{a-b}$):

$$BV=\sqrt{(h+k)^2+a^2}=\sqrt{\left(h+\frac{bh}{a-b}\right)^2+a^2}=\sqrt{\frac{h^2a^2}{(a-b)^2}+a^2}=\frac{a}{a-b}\sqrt{h^2+(a-b)^2}$$

Quindi:

$$VD=\frac{b}{a}\cdot BV=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{a-b}\sqrt{h^2+(a-b)^2}=\frac{b}{a-b}\sqrt{h^2+(a-b)^2}$$

$$S_l(tronco)=\pi a\cdot BV-\pi b\cdot\frac{b}{a}\cdot BV=\pi BV\left(a-\frac{b^2}{a}\right)=\pi\frac{a}{a-b}\sqrt{h^2+(a-b)^2}\left(a-\frac{b^2}{a}\right)=$$

$$=\pi\frac{a}{a-b}\sqrt{h^2+(a-b)^2}\left(\frac{a^2-b^2}{a}\right)=\pi(a+b)\sqrt{h^2+(a-b)^2}=S_l(tronco\ cono)$$

Osserviamo che $\sqrt{h^2+(a-b)^2}$ è l'apotema del tronco; infatti:

$$BD=BV-VD=\frac{a}{a-b}\sqrt{h^2+(a-b)^2}-\frac{b}{a-b}\sqrt{h^2+(a-b)^2}=\sqrt{h^2+(a-b)^2}$$

b)

Posto che il cono preso in esame abbia la superficie laterale di $\sqrt{3}\,\pi\ \ dm^2$, *quale ne è il volume massimo?*

$S_l(cono)=\pi a\cdot VB=\sqrt{3}\,\pi\ ,\ \ a\cdot VB=\ \sqrt{3}$; poniamo $VB=x,\ \ a=\frac{\sqrt{3}}{x}\ ,\ con\ x>a$

Il volume del cono è: $V = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot VH$ e risulta $VH = \sqrt{VB^2 - HB^2} = \sqrt{x^2 - a^2}$

Tale volume è massimo se lo è $V^2 = \frac{1}{9}\pi^2 a^4 \cdot VH^2 = \frac{1}{9}\pi^2 a^4 \cdot (x^2 - a^2)$ che è massimo se

lo è $y = a^4 \cdot (x^2 - a^2) = \frac{9}{x^4} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{x^2}\right) = 9\left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^6}\right)$, $con\ x > a$

Studiamo la derivata prima:

$y' = 9\,(-2x^{-3} + 18x^{-7}) \geq 0\ \ se\ \ -x^{-3} + 9x^{-7} \geq 0,\ \ x^{-3} - 9x^{-7} \leq 0\,, \frac{1}{x^3} - \frac{9}{x^7} \leq 0\,,$

$\frac{x^4-9}{x^7} \leq 0\,,\quad \frac{(x^2-3)(x^2+3)}{x^7} \leq 0 \iff \frac{x^2-3}{x} \leq 0$, essendo chiaramente $x > 0$ si ha: $0 < x \leq \sqrt{3}$

Il volume quindi cresce se $0 < x < \sqrt{3}$ e decresce se $x > \sqrt{3}$, pertanto è massimo se

$x = \sqrt{3}$, da cui $a = \frac{\sqrt{3}}{x} = 1$:

il cono di volume massimo ha raggio di base di $1\ dm$ e apotema di $\sqrt{3}\ dm$.

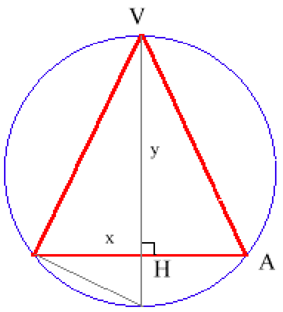
L'altezza del cono massimo è $VH = \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{2}$

$V(massimo) = \frac{1}{3}\pi \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi$

c)

Si calcoli il raggio della sfera circoscritta al cono massimo determinato.

Ricordiamo che il cono in oggetto ha raggio di base $x = 1$, altezza $y = \sqrt{2}$



Detto R il raggio della sfera circoscritta al cono, per il secondo teorema di Euclide si ha:

$x^2 = y(2R - y),\ \ 1 = \sqrt{2}\left(2R - \sqrt{2}\right),\ \ \frac{\sqrt{2}}{2} = 2R - \sqrt{2}\,,\ \ 2R = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2},\ \ R = \frac{3}{4}\sqrt{2}\ \ dm$

d)

Si dia una approssimazione in centilitri della capacità di tale sfera.

Il volume della sfera è: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^3 \; dm^3 = \frac{9}{8}\pi\sqrt{2} \; dm^3 = \frac{9}{8}\pi\sqrt{2} \; litri \cong$

$\cong 8.998 \; litri \cong 499{,}8 \; centilitri \cong 500 \; centilitri$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria